PHILOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA. AUCTORE ISAACO NEWTONO...

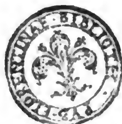
PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA:

AUTORE ISAACO NEWTONO Eq. Aurato.

TOMI TERTII CONTINUATIO,

CONTINENS

LUNÆ THEORIAM NEWTONIANAM.



INTRODUCTIO
AD
LUNÆ THEORIAM
NEWTONIANAM.

TRia ſunt in Lunæ Theoriâ ſpectanda, in quibus verſatur omnis quæſtio Aſtronomica quæ de ipſâ inſtitui poteſt; Primum ejus motus quâtenus è terrâ obſervatur; 2do. Figura Lunaris orbitæ à circulo plùs minuſve recedens & apſidum ejus poſitio; ac tertiò ejus orbitæ ad Eclipticam inclinatio.

Si extrà Solis actionem Luna motus ſuos ageret; Luna Ellipſim quamlibet circa Terram deſcribere poſſet in Plano quovis, & ea Ellipſis perpetuò eadem maneret conſtantemque angulum cum Ecliptica efficeret; Itaque tota Theoria Lunæ circa hæc verſaretur Elementa, Primò, ut ex tempore quod Luna conſumeret ut à quâdam ſtellâ diſcedens ad eamdem rediret, obtineatur duratio ejus menſis Periodici ſiderei ſicque motus ejus medius determinetur, unde facile obtinebitur via quam Luna dato tempore per eum motum medium emetiri poteſt, ita ut, datâ Epochâ, hoc eſt, dato loco Cœli in quo Luna aliquando obſervata fuiſſet, inde quem in locum migrare debuiſſet, dato tempore, per medii motus calculum inveniri poſſet.

Poſtea; locus Apogæi Lunæ, quod in Cœlis eidem puncto ſemper reſponderet, foret requirendus, tum excentricitas ejus orbitæ; ſic enim figura Ellipſeos quam Luna deſcribit obtineretur, & quia, citra Solis actionem, Luna moveretur ſecundùm Legem Keplerianam, hoc eſt, ita ut tempora quibus durantibus Luna moveretur, non quidem ſint proportionalia angulis è Terrâ ſpectatis, ſed areis deſcriptis, hinc fiet ut differentia loci Lunæ per motum medium computati ab ejus loco vero, obtineatur ex orbitæ Lunaris figurâ per Methodos notas, quæ differentia dicitur Æquatio Lunæ ſoluta, hoc eſt, æquatio à Sole non pendens, & intelligetur quibus in locis illa æquatio ſit adhibenda ex ſitu cognito Apogæi Lunæ, pendet enim omninò ea differentia ex ſitu Lunæ in Orbe ſuo reſpectu Apogæi ſui.

Tertiò, Quærendum foret obſervationibus, quibus in locis Luna

Eclipticam secet, cui nempe Cœli loco respondeant ejus Nodi, qui in hac hypothesi fixi forent, & quonam angulo Orbita Lunæ foret inclinata ad Eclipticam, unde, quoniam ea inclinatio constans esset, distantiâ Lunæ à plano Eclipticæ per perpendiculum mensurata, foret semper proportionata distantiæ perpendiculari Lunæ à Linea nodorum, itaque ex cognito loco Lunæ & Nodorum cognosci poterit quonam sub Angulo Luna ab Ecliptica distare videatur ex ipsâ terrâ; & ad quodnam punctum Eclipticæ referri debeat.

Si itaque Lunæ motus citra actionem Solis considerentur tabulæ Astronomicæ Lunares hæc continere debebunt

1°. Epocham Loci Lunæ dato aliquo tempore; tum observationem loci Apogæi quod fixum maneret, & observationem loci Nodorum pariter fixorum.

Postea continere debebunt tabulam motus medii, tum tabulam Æquationis Lunæ secundum ejus distântiam mediam ab Apogæo; tabulam latitudinis Lunæ secundùm variam distantiam Lunæ à Nodo & denique tabulam reductionis Lunæ ad Eclipticam, secundùm eam distantiam Lunæ à Nodo.

Possunt his addi, tabula distantiarum Lunæ à Terra secundum ejus distantiam ab ejus Apogæo, tabula Diametrorum ejus apparentium secundùm eamdem distantiam ab Apogæo, & denique Tabula Parallaxeos quâ deprimitur Luna respectu spectatoris in superficie telluris collocati, prout diversa est ejus à Terra distantia, & prout altitudo supra horizontem est diversa.

Talis foret tota de Lunâ Theoria, citra Solis actionem; sed jam à longo tempore intellexerunt Astronomi Lunares motus à Lunæ situ respectu Solis plurimum turbari, unde varias correctiones, sive Æquationes variis titulis concinnare sunt conati.

Quam luculenter ex Gravitatis Theoriâ, hæc non modò explicentur sed etiam accurato calculo determinentur demonstrare aggressus est Newtonus, & eas omnes Æquationes quæ ex Sole pendent, calculis ex Theoriâ suâ deductis ita feliciter statuit ut motus Lunæ ejusve Æquationes ex calculo repertæ in minuto secundo aut propè cum iis quæ ab accuratioribus observatoribus determinari potuerunt consentiant, quod autoritatem integram illi Theoriæ conciliat. Calculi autem illi, nec faciles sunt, nec compendiosi, nec semper commodè ad syntheticam formam reducendi; Quos Newtonus hâc ultimâ ratione Lectori suo sistere potuit eos enucleatè tradit, cæteros omittit & quod ex iis obtinetur strictim in Scholio indicat, & primo quales sint illæ æquationes juxta Astronomorum observationes dicit & quibusnam Legibus secundum ipsos

ipsos observatores sint adstrictæ, mox tradit quales æquationes ex suis calculis emergant & quænam sint earum Leges.

Ipsum tam observationibus ante ipsum institutis, quam observationibus Flamstedianis usum esse constat, imo & ipsum exinde Tabulas Lunares sibi construxisse liquet, ex quibus multa profert quarum pleraque in Rudolphinis, aut in Ludoviceis Tabulis facile non comperiuntur, sed quæ maximè consentiunt cum novis Ill. Cassini Tabulis, ita ut quo perfectiùs Cœli motus dignoscunt Astronomi eo propiùs ad Newtonianas Theorias accedere deprehendantur.

Ut itaque Solis actionis in Lunam & ejus orbitam habeatur ratio; Primum fiat abstractio excentricitatis Orbitæ tam Telluris quam Lunæ, deprehenditur quod ex Solis actione mensis Periodicus Lunæ longior evadat & ejus Orbita ex circulari in Ellipsim mutetur cujus axes per Prop. XXVIII. sunt determinati.

Secundò, tam ex eâ figurâ quam Orbita Lunæ induit quam ex acceleratione Lunæ per eam partem actionis Solis quæ secundum Tangentem orbitæ Lunaris dirigitur, nascitur Variatio quam Tycho primus observavit, & maximam in Octantibus $40' \frac{1}{2}$ statuit, illam Ill. Cassinus facit $33'. 40''$. in Elementis Astronomiæ, eam verò ipse Newtonus in hypothesi orbitas Telluris & Lunæ esse circulares $35'. 10''$. calculavit Prop. XXIX.

Tertiò ex eâ Solis actione nascitur motus Apogæi Lunaris in consequentia, cujus motus fundamentum indicat Newtonus Prop. XLV. Lib. I.

Quartò inde deducitur motus medius nodorum Prop. XXXII. observationibus proximè congruus; Quinto denique Inclinationis Orbitæ Lunaris mutatio explicatur Prop. XXXIV. & XXXV.

Nunc verò adjungatur consideratio Excentricitatis Orbitæ Telluris, eâ fit ut actio Solis major sit cum terra est in Perihelio suo quam in Aphelio; Inde oriuntur correctiones variæ his omnibus Lunæ erroribus adjungendæ; Primùm cùm mensis Periodicus Lunæ per Actionem Solis longior evadat & motus ejus medius augeatur, id incrementum quando terra est in Perihelio majus est quam cum est in Aphelio, hinc ea tardatio inæqualiter in motum Lunæ distributa, efficit ut hoc nomine locus ejus per medium motum inventus ab ejus vero loco dissentiat, hinc itaque notis nostris ad initium Scholii ad calcem Prop. XXXV. adjecti quod ad totam Lunæ Theoriam pertinet incrementum medium motus medii ex actione Solis ortum assignamus, tum postea aperimus rationem quâ obtineri potest æquatio ceu correctio motus medii adhibenda propter inæqualem Terræ à Sole distantiam, quæ quidem æquatio continetur in eâ quam Ill. Cassinus, titulo *Primæ Æquationis Solaris*, tradit.

Et-

Eâdem ratione, variationes motus Apogæi & motus nodorum ex situ diverso Terræ ad aphelium aut Perihelium suum ex utriusque motu medio dato in secundo Paragrapho derivare docetur.

His ex Excentricitate orbitæ Telluris deductis adjungatur consideratio Excentricitatis Orbitæ Lunaris, aut ejus inclinationis ad Eclipticam inde novæ irregularitates prioribus adnascuntur.

Primò mensis Periodicus paulo major fit cum Linea Apsidum per Solem transit quam cum ipsi est perpendicularis, hinc correctio nova Æquationi motus medii quæ in primo Scholii Paragrapho exponitur est facienda, hanc novam Æquationem III. Cassinus exhibet in Tabella cujus titulus est *secunda Æquatio Solaris* & tertio Paragrapho Scholii traditur.

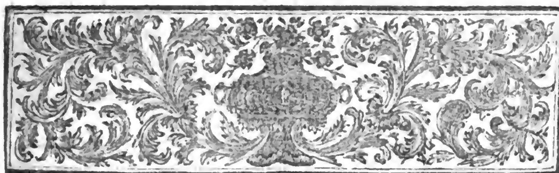
Itidem si linea nodorum per Solem transeat paulo major erit Solis actio & correctio nova exinde nascetur eidem motui medio, hanc quarto Paragrapho Scholii indicat Newtonus.

Præterea excentricitas ipsa orbitæ Lunaris ex diverso situ Apogæi respectu Solis mutatur, nunc major nunc minor evadit idque etiam inæqualiter pro distantiâ telluris à Sole.

Rursus ipse motus Apogæi prout Apogæum diversimodè situm est respectu Solis mutatur, hinc Æquatio Apogæi nascitur eaque duplex; prima supponendo telluris à Sole distantiam constantem, altera verò pendet ex mutatione distantiæ telluris à Sole.

Hinc tandem cum orbitæ Lunaris forma, excentricitas & Apogæi positio mutetur, omninò mutantur correctiones illæ quæ deducebantur ex Lunæ excentricitate mediocri, quæ æquationem solutam constituebant; ultimo autem Scholii Paragrapho Newtonus docet quâ ratione novæ illæ correctiones sint instituendæ: Omnia verò in hoc Scholio sine demonstratione tradit nec indicato suorum calculorum artificio, ideoque nostri putavimus officii, eam indagare viam cui Newtonus in iis reperiendis insistere debuit, labore quidem non parvo, successu qualicumque, utinam Lectoribus non ingrato.

PHI-

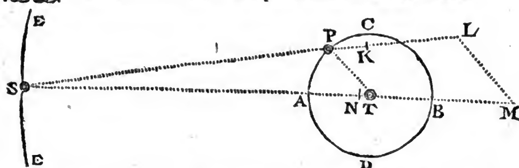


PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

LIBRI TERTII CONTINUATIO.

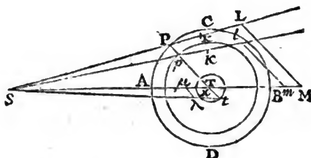
PROPOSITIO XXV. PROBLEMA VI.

*Nvenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.*



Designet S solem, T terram, P lunam, $CADB$ orbem lunæ. In SP capiatur SK æqualis ST; sitque SL ad SK in duplicatâ ratione SK ad SP, & ipsi PT agatur parallela LM, & si gravitas acceleratrix terræ in solem exponatur per

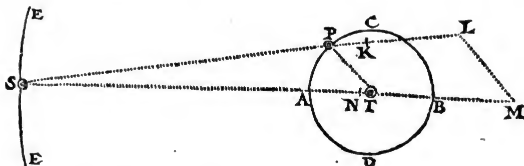
distantiam ST vel SK, erit SL gravitas acceleratrix lunæ in solem. Ea componitur ex partibus SM, LM, quarum LM & ipsius SM pars TM perturbat motum lunæ, ut in libri primi prop. LXVI. & ejus corollariis expositum est. (q) Quâtenus terra & luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus terræ circa centrum illud à viribus consimilibus; sed summas tam virium quam motuum referre licet ad lunam, & summas virium per lineas ipsis analo-



109. (q) * *Quâtenus Terra & Luna circa commune gravitatis centrum revolvuntur perturbabitur etiam motus terræ circa centrum illud à viribus consimilibus;* Designet ut prius S solem, sed sit T centrum commune gravitatis terræ & lunæ; sit itaque p luna & t terra circum commune gravitatis centrum revolventes, ita ut distantia p t sit æqualis P T, ductisque Sp, S t, sumptisque in eis lineis productis si opus sit S k, S κ æqualibus S T, secatisque S l & S λ ita ut sint ad S T in duplicatâ ratione S T ad S p & ad S t, actisque l m, $\lambda\mu$ Parallelis ad p t, si exponat S T vim acceleratricem centri communis gravitatis T in solem, exponent S l & S λ vires accelerantes lunam & terram in solem, & perturbabuntur utriusque motus respectu centri communis gravitatis per vires l m & $\lambda\mu$, T m & T μ; Quæ vires consimiles sunt viribus L M & T M quibus lunam solam perturbari dictum fuit in suppositione terram esse immotam; nam ob maximam distantiam puncti S, lineæ P L, p l, T M, t λ pro parallelis sunt habendæ, ideoque figuræ T P L M, T p l m, T t $\lambda\mu$ pro Parallelogrammis sunt habendæ, quæ angulum æqualem in T habent, præterea latera P T, T M; p T, T m; T t, T μ, eamdem habent inter se rationem, demonstratur enim in notâ 500. lib. 1. (quæ ad majorem facilitatem repetitur in notâ (u) subsequente) esse P T ad T M, p T ad T m, T t ad T μ ut Radius ad triplum Cosinus anguli A T P qui Cosinus cum idem sit in tribus hisce casibus, latera Parallelogrammorum circa æqualem angulum posita erunt proportionalia, ea verò latera designant tam vires quibus Luna circa terram immotam revolvendo perturbatur quam eas quibus perturbarentur luna & terrâ circa centrum commune revolvendo, illæ *Vires ergo sunt consimiles.*

Sed summas tam virium quam motuum referre licet ad Lunam. Quippe in observationibus motus Lunæ respectu terræ quasi hæc immota esset consideratur, tunc autem summæ virium acceleratricium, ex quibus velocitates respectivæ nascuntur ipsi tribui debent, *& summas virium per lineas*

analogas *TM* & *ML* designare. Vis *ML* in (r) mediocri suâ quantitate est ad vim centripetam, quâ luna in orbe suo circa terram quiescentem ad distantiam *PT* revolvi posset, in duplicatâ ratione temporum periodicorum lunæ circa terram & terræ circa solem (per corol. 17. prop. LXVI. lib. 1.) hoc est,



in duplicatâ ratione dierum 27. hor. 7. min. 43. ad dies 365. hor. 6. min. 9. id est, ut 1000 ad 178725, seu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Invenimus autem in propositione quartâ quod, si terra & luna circa commune gravitatis centrum revolvantur, earum distantia mediocris ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ semidiametrorum mediocrium terræ

neat TM & ML ipsis analogas designare. Vires enim acceleratrices pT & Tt simul junctæ æquales sunt soli vi PT & similem effectum edunt, admovent utique corpora p & t, secundum directionem pTt, si ergo vis acceleratrix PT summæ utriusque æqualis admoveat corpus P versus immotum T, planè idem erit effectus ex corpore t vel T spectatus: Vires MT, Tμ divellunt corpora à se mutuo secundum directionem ST, idem verò præstat vis TM quæ summæ ambarum est æqualis, nam est pT : Tt :: mT : Tμ :: ergo pT:pT+Tt :: mT : mT+Tμ & alternando pT : mT :: (PT : MT) :: pT + Tt : mT + Tμ. Sed est pT + Tt = PT ergo etiam mT + Tμ = MT.

(r) * *Vis ML in mediocri suâ quantitate &c.* Ob magnam Solis distantiam figura PTML est parallelogrammum ideoque ML est proximè æqualis lineæ PT, ergo vis ML erit ad vim quâ Sol agit in punctum T, ut PT ad SK sive ST, sed vires centrales qualescumque sunt inter se directè ut Radii circulorum qui per eas describuntur & inverse ut quadrata temporum Periodicorum, ergo ea vis quâ sol agit in punctum T, est ad vim quâ Luna in orbe suo retinetur (posito illam revolvi circa terram quiescentem) ut ST ad PT directè & ut quadratum temporis Periodici Lunæ circa terram ad quadratum temporis Periodici Terræ circa Solem; Ergo compositis rationibus, vis ML est ad vim quâ Luna in orbe suô retinetur ut quadratum temporis Periodici Lunæ ad quadratum temporis Periodici Terræ circa Solem hoc est in duplicatâ ratione dierum 27, hor. 7, 43′ ad 365 dies, 6 hor. 9′ quæ est duratio anni siderei. 1092

De Mundi Systemate.

terræ quamproximè. Et (ſ) vis quâ luna in orbem circa terram quieſcentem, ad diſtantiam *PT* ſemidiametrorum terreſtrium 60, revolvi poſſet, eſt ad vim, quâ eodem tempore ad diſtantiam ſemidiametrorum 60 revolvi poſſet, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; & (t) hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60×60 quamproximè. Ideoque vis mediocris *ML* eſt ad vim gravitatis in ſuperficie terræ,

109. (ſ) * *Et vis quâ Luna ad diſtantiam* $60\frac{1}{2}$ *ſemid. revolvi poſſet eſt ad vim quâ ad diſtantiam 60 ſemid. revolvi poſſet eodem tempore ut* $60\frac{1}{2}$ *ad 60.* Vires enim centrales ſunt ut diſtantiæ directè & tempora Periodica inverſe (Cor. 2. Prop. IV. Lib. I.) cum ergo hîc tempora Periodica æqualia ponantur, Vires Centrales ſunt ut diſtantiæ. Newtonus autem loco diſtantiæ $60\frac{1}{2}$ ſemid. terræ quæ revera intercedit inter terram & lunam, aſſumit diſtantiam 60 ſemid. tantùm, quia in præcedente ratiocinio vim quâ Luna in orbe ſuo retinetur æſtimaverat quaſi terra immota eſſet & Luna ad diſtantiam $60\frac{1}{2}$ ſemid. à terrâ tempore 27. dier. 7 hor. 43. min. circa terram revolveretur; Verum cum terra reverâ circa centrum gravitatis commune Lunæ & Terræ revolvatur, ea vis quâ Luna ad diſtantiam $60\frac{1}{2}$ ſemid. tempore illo revolvi apparet, minor eſt ea quâ ad eamdem diſtantiam eodemque tempore circa terram immotam revolveretur, & eſt æqualis illi quâ, eodem quidem tempore Periodico, ſed ad diſtantiam 60 ſemid. circa terram immotam revolveretur, ut conſtat ex Prop. LX. Lib. I. Eâ enim Propoſitione ſtatuitur quod ſi duo corpora revolvantur circa centrum commune gravitatis, axis Ellipſeos quam unum circa alterum motum deſcribit eſt ad axem Ellipſeos quam circa illud quieſcens eodem tempore Periodico & eâdem vi deſcribere poſſet, ut ſumma corporum amborum ad primam duarum medieproportionalium inter hanc ſummam & corpus alterum, quare cum Telluris corpus ſit ad corpus Lunæ ut 42 ad 1, & prima duarum medieproportionalium inter 43 & 42 ſit $42\frac{2}{3}$ ſitque 43 ad $42\frac{2}{3}$ ut $60\frac{1}{2}$ ad 60 proximè, Vis quâ Luna in orbe ſuo retinetur, ea eſt quâ ad diſtantiam 60 ſemid. terræ eodem ipſo tempore Periodico quod obſervatur circa terram immotam revolvi poſſet.

(t) * *Et hæc vis &c.* Per hujuſce Libri Prop. IV.

terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{29}{40}$, seu 1 ad 638092,6. Inde verò & ex proportione linearum TM, ML, datur etiam vis TM (u): & hæ sunt vires solis quibus lunæ motus perturbantur. *Q. E. I.*

LIBER TERTIUS: PROP. XXVI. PROBL. VII.

PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA VII.

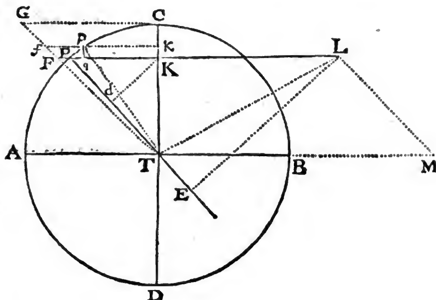
Invenire incrementum horarium areæ quam luna, radio ad terram ducto, in orbe circulari describit.

Diximus aream, quam luna radio ad terram ducto describit, esse tempori proportionalem, nisi quatenus motus lunaris ab actione solis turbatur. Inæqualitatem momenti, vel incrementi horarii hic investigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem lunæ circularem esse, & inæqualitates omnes negligamus, eâ solâ exceptâ, de quâ hic agitur. Ob ingentem verò solis distantiam, ponamus etiam lineas *SP*

(u) * *Datur etiam vis TM.* Ob parallelas PT, LM & ingentem puncti S distantiam, PL & TM sunt parallelæ, & figura PTLM est parallelogrammum, ideoque TM sumitur ut proxime æqualis PL; Est autem PL triplum Cosinus anguli ATP existente TP sive LM radio; Nam quia SK est æqualis ST, si centro S radio ST describatur arcus TK, erunt ST & SK in eum arcum perpendiculares, sed is arcus proxime coincidit cum rectâ TC perpendiculari lineæ ST in T (ob distantiam centri S) ergo punctum K in ea recta TC occurret & SK sive PK illi rectæ TC erit perpendicularis, ideoque PK erit Cosinus Anguli ATP; sed, per constructionem, est SP^2 ad $SK^2 - SP^2$ (sive quia $SK = SP + PK$) ad $2SP \times PK + PK^2$ ut SK (sive $SP + SK$) ad $SL - SK$ (sive KL) ideoque est $KL = 2PK + \frac{3PK^2}{SP} + \frac{PK^3}{SP^2}$, sed omittendi sunt ultimi termini propter ingentem divisorem SP, ergo est $KL = 2PK$, & $PK + KL$ sive $PL = 3PK$. Q. E. D. 109

DE MUNDI SYSTEMATE.

SP, ST ſibi invicem parallelas eſſe. (x) Hoc pacto vis LM reducetur ſemper ad mediocrem ſuam quantitatem TP, ut & vis TM ad mediocrem ſuam quantitatem $3PK$. Hæ vires (per legum corol. 2.) componunt vim TL; & hæc vis, ſi in radium TP demittatur perpendiculum LE, reſolvitur in vires TE, EL, quarum TE, agendo ſemper ſecundum radium TP, nec accelerat nec retardat deſcriptionem areæ TPC radio illo TP



factam; & EL agendo ſecundum perpendiculum, accelerat vel retardat ipſam, quantum accelerat vel retardat lunam. Acceleratio illa lunæ, in tranſitu ipſius à quadraturâ C ad conjunctionem A, ſingulis temporis momentis facta, eſt ut (y) ipſa vis accelerans EL, (z) hoc eſt, ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$. Exponatur

tempus

109. (x) * *Hoc pacto.* Vide notam (u) præcedentem.

(y) * *Ut ipſa vis accelerans* (13. lib. 1.).

(z) * *Hoc eſt ut* $\frac{3PK \times TK}{TP}$. Nam Triangula PTK, PLE ſunt ſimilia propter angulum communem in P & angulos rectos K & E, ergo eſt TP : TK :: PL : $EL = \frac{PL \times TK}{TP}$, (ſed per notam u) eſt $PL = 3PK$ ergo eſt $EL = \frac{3PK \times TK}{TP}$.

tempus per motum medium lunarem, ([a]) vel (quod eodem ferè recidit) per angulum CTP, vel etiam per arcum CP. Ad CT erigatur normalis CG ipsi CT æqualis. Et diviso arcu quadrantali AC in particulas innumeras æquales Pp, &c. per quas æquales totidem particulæ temporis exponi possint, ductâque pk perpendiculari ad CT, jungatur TG ipsis KP, kp productis occurrens in F & f; & erit FK æqualis TK, & ([b]) Kk erit ad PK ut Pp ad Tp, ([c]) hoc est in datâ ratione, ([d]) ideoque $FK \times Kk$ seu area $FKkf$, erit ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$, id est, ut EL; & compositè, area tota $GCKF$ ut summa omnium virium EL tempore toto CP impressarum in lunam, ([e]) atque ideo etiam ut velocitas hâc summâ genita, id est, ut acceleratio descriptionis areæ CTP, seu incrementum momenti. ([f]) Vis quâ luna circa terram quiescentem ad distantiam TP, tempore

110 (a) * *Quod eodem ferè recidit.* In hypothesi orbem Lunarem esse circularem, angulus CTP vel arcus CP forent proportionales tempori, semotâ consideratione perturbationis motus Lunæ ex Solis actione productæ; hæc vero perturbatio respectu ipsius motus Lunæ est exigua, itaque anguli CTP vel arcus CP tempori fere proportionales censeri possunt.

(b) * *Kk erit ad PK ut Pp ad Tp* sive TP; Ex notissimâ circuli proprietate fluit hæc proportio, nam si ex puncto p ducatur lineola pq perpendicularis ad PK, ea erit parallela & æqualis lineæ Kk, formabiturque Triangulum fluxionale Ppq simile Triangulo PKT, nam cum anguli pPK & KPT rectum simul efficiant, & pariter anguli KPT & PTK, æquales sunt anguli pPK & PTK unde est pq sive Kk ad PK ut Pp ad TP.

(c) * *Hoc est in datâ ratione.* Ratio enim Pp ad Tp est data, quia singulæ partes Pp sumuntur æquales, sunt itaque singulæ in eâdem ratione ad radium TP.

(d) * *Ideoque FK × Kk seu area FKkf ut* $\frac{3PK \times TK}{TP}$; Cum ratio Kk ad PK sit data, data etiam erit ratio Kk ad 3PK, & hæc ratio manebit etiamnum data si consequens 3PK per quantitatem constantem TP dividatur, erit ergo data ratio Kk ad $\frac{3PK}{TP}$, denique non mutabitur hæc ratio si ambo termini per quantitates æquales FK & TK multiplicentur, ergo ratio Kk × FK (seu areæ FKkf) ad $\frac{3PK \times TK}{TP}$ est etiam data, hoc est, est area FKkf ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$. 110.

(e) * *Atque ideo etiam ut velocitas* (13. lib. 1.).

(f) * *Vis quâ Lunâ circa terram ad distantiam TP tempore suo Periodico CADB revolvi posset efficeret ut corpus liberè cadendo tempore CT describeret longitudinem* $\frac{1}{2}CT$ &c. Si corpus gyretur in circulo per vim ad ejus centrum tendentem, primum uniformiter girabitur; tum, quadratum arcûs quovis tempore descripti erit æquale circuli Diametro ducto in altitudinem quam corpus liberè cadendo tempore eodem percurreret si uniformiter acce-

re suo periodico *CADB* dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvi posset, efficeret ut corpus, tempore *CT* cadendo, describeret longitudinem $\frac{1}{2}$ *CT*, & velocitatem simul acquireret æqualem velocitati, quâ luna in orbe suo movetur. Patet hoc per corol. 9. prop. IV. lib. I. Cum autem perpendiculum *Kd* in *TP* demissum (g) sit ipsius *EL* pars tertia, & (h) ipsius *TP* seu *ML* in octantibus pars dimidia, vis *EL* in octantibus, (i) ubi maxima

110 acceleraretur per vim centripetam quâ circulus describitur.

Nam si sumatur arcus quam minimus altitudo quæ per vim centralem liberè percurreretur dum ille arcus quamminimus describeretur, foret ejus arcus minimi sinus versus; sed ex natura circuli, factum Diametri ducti in sinum versum arcûs, est æquale quadrato chordæ illius arcus, sive quadrato arcus ipsius si adeo sit exiguus ut pro suâ chordâ sumi possit.

Spatia verò liberè cadendo per vim uniformiter accelerantem descripta, sunt ut quadrata temporum, arcus verò interea percursi sunt ut tempora, quia corpus uniformi celeritate giratur, ergo spatium minimum per vim centripetam liberè descriptum est ad aliud quodvis spatium per eamdem vim centrifugam liberè descriptum (ideoque etiam facta horum spatiorum per Diametrum circuli) sunt ut quadrata arcuum correspondentibus temporibus descriptorum: sed prius factum est æquale quadrato arcus correspondentis, ergo & alterum factum erit æquale quadrato arcus correspondentis, hoc est altitudo quæcumque cadendo liberè descripta in Diametrum ducta efficit factum æquale quadrato arcus eodem tempore revolvendo uniformiter percursi.

Quod cum ita sit, cadat libere corpus per $\frac{1}{2}$ CT h. e. per radii semissem, ducaturque hæc longitudo per Diametrum seu 2 CT factum CT² sive quadratum ipsius radii æquale erit quadrato arcus eodem tempore descripti, erit ergo is arcus æqualis radio CT, sed velocitas acquisita liberè cadendo per Radii semissem $\frac{1}{2}$ CT talis est ut corpus movendo uniformiter eâ celeritate acquisitâ duplum ejus altitudinis Radium nempe integrum CT eodem tempore describere posset, quæ est ipsa longitudo arcus quam corpus uniformiter revolvens descripsisset eodem tempore, ergo velocitas acquisita lapsu per $\frac{1}{2}$ CT ea est quâ corpus in orbe suo revolvitur.

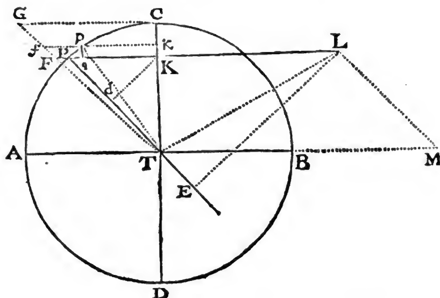
Ea denique longitudo $\frac{1}{2}$ CT percurretur tempore quod erit ad totum tempus Periodicum ut CT ad circumferentiam CADB, nam tempora sunt ut arcus uniformiter descripti, sed tempus quo corpus per $\frac{1}{2}$ CT labitur est æquale tempori quo arcus æqualis CT percurritur ergo est illud tempus ad totum tempus Periodicum ut CT ad totam peripheriam CADB.

(g) * *Kd sit ipsius EL pars tertia.* Ob Triangula similia PLE, PKd est EL ad Kd ut PL ad PK, sed (per notam (u)) est PK tertia pars lineæ PL, est itaque pariter Kd tertia pars lineæ EL.

(h) * *Kd ipsius TP seu ML in octantibus pars dimidia*; Nam in octantibus anguli KTd, PKd, KPd sunt omnes 45 grad. est itaque Td = Kd = dP est ergo Td sive Kd ipsius TP pars dimidia in octantibus.

111 (i) * *Ubi maxima est.* Ut inveniatur punctum in quod vis EL sive $\frac{3PK \times TK}{TP}$ est maxima, sit TP $= r$, TK $= x$, PK $= y$ erit EL $= \frac{3yx}{r}$ cujus fluxio est $\frac{3ydx + 3xdy}{r}$, maxima est ergo EL ubi hæc fluxio æquatur nihilo, ideoque ubi $ydx = -xdy$, sed cum in circulo sit

maxima est, superabit vim ML in (k) ratione 3 ad 2, ideoque erit ad vim illam, quâ luna tempore suo periodico circa terram quiescentem revolvi posset, (l) ut 100 ad $\frac{2}{3} \times 17872\frac{1}{2}$ LIBER TERTIUS. PROP. XXVI. PROB. VII.



seu 11915, & tempore CT velocitatem generare deberet quæ (m) esset pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis lunaris, tempore autem CPA velocitatem majorem generaret in ratione CA ad CT seu TP.

Expo-

fit $y = \sqrt{rr - xx}$, & $dy = \frac{-x\,dx}{\sqrt{rr - xx}}$ unde substitutis valoribus æquatio $ydx = -xdy$ in hanc mutatur $dx\sqrt{rr - xx} = \frac{xx\,dx}{\sqrt{rr - xx}}$ & reductis terminis fit $rr = 2xx$, unde est $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ & $dy = -dx$, & $y = x$; Ideoque in Triangulo P T K angulus T debet esse 45 grad. & P debet esse in octante Circuli.

(k) * *In ratione 3 ad 2.* Est E L ad K d ut 3 ad 1 (not. g) est K d ad T P sive M L ut 1 ad 2 (not. h) ergo E L ad M L ut 3 ad 2, ex æquo.

(l) * *Ut 100 ad* $\frac{2}{3}$ 17872 $\frac{1}{2}$. Vis E L est ad vim M L ut 3 ad 2; vis M L est ad vim quâ Lunâ in orbe suo circa terram quiescentem revolvi posset tempore suo Periodico ut 1000 ad 178725 (Prop. XXV. hujusce) sive ut 100 ad 17872 $\frac{1}{2}$; Ergo compositis rationibus vis E L est ad eam vim quâ Luna revolvitur ut 100×3 ad 2×17872 $\frac{1}{2}$ sive ut 100 ad $\frac{2}{3}$ 17872 $\frac{1}{2}$ hoc est ad 11915, ideoque vis E L est $\frac{100}{11915}$ vis Lunæ. 111.

(m) *Quæ esset pars* $\frac{100}{11915}$ *velocitatis Lunaris.* Patet ex notâ (f) vim quâ Lunâ revolvitur efficere ut corpus ab eâ vi uniformiter acceleratum cadendo tempo-

Exponatur vis maxima EL in octantibus per aream $FK \times Kk$ rectangulo (n) $\frac{1}{2} TP \times Pp$ æqualem. Et (o) velocitas, quam vis maxima tempore quovis CP generare posset, erit ad velocitatem quam vis omnis minor EL eodem tempore generat, ut rectangulum $\frac{1}{2} TP \times CP$ ad aream $KCGF$: tempore autem toto CPA, velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum $\frac{1}{2} TP \times CA$ & triangulum TCG, sive ut arcus quadrantalis CA & radius TP. Ideoque (per prop. IX. lib. V. elem.) velocitas posterior, toto tempore genita, erit pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis lunæ. (p) Huic lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analoga est, (q) addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius; & si momentum mediocre exponatur per numerum 11915, sum-

511. re CT eam ipsam acquireret velocitatem quâ Luna revolvitur, vis ergo quæ vis Lunaris est pars $\frac{100}{11915}$ eodem tempore generaret velocitatem quæ velocitatis Lunaris foret pars $\frac{100}{11915}$.

(n) * *Exponatur vis maxima EL in octantibus per aream FK × Kk rectangulo* $\frac{1}{2}$ *TP × Pp æqualem*, vis EL semper est proportionalis areæ $FK \times Kk$ ex demonstratis, sed in octantibus ubi ea vis est maxima est FK sive $TK = \frac{TP}{\sqrt{2}}$ & $Kk = \frac{Pp}{\sqrt{2}}$ ergo $FK \times Kk = \frac{TP \times Pp}{2}$.

(o) * *Et velocitas quam vis maxima tempore quovis CP generat ad velocitatem quam generant* vires veræ EL *eodem tempore agentes ut* $\frac{1}{2}$ *TP × CP ad aream KCGF*; Velocitates genitæ sunt ut vires quibus generantur ductæ in tempus per quod generantur, cum itaque supponatur omnes arcus Pp temporibus quamproximè æqualibus describi, si ii arcus Pp æquales inter se sumantur (vid. not. a præced.) velocitates genitæ dum arcus Pp percurruntur sunt ut ipsæ vires sive ut areæ FKkf, ideoque summa velocitatum genitarum tempore CP, sive dum arcus CP describitur, est ut tota area KCGF, sed vis in octantibus sive velocitas quæ in octante generatur durante tempore Pp, est $\frac{TP \times Pp}{2}$, quia eo in loco is est valor areæ FKkf, qui valor est ipse valor areæ PTp, ergo si singulis momentis Pp similis velocitas generaretur, summa velocitatum genitarum tempore CP foret area CTP sive $\frac{1}{2} TP \times CP$, ergo velocitas quam vis maxima generat est ad eam quam vires veræ generant, tempore utrinque eodem CP, ut $\frac{1}{2} TP \times CP$ ad KCGF.

(p) *Huic Lunæ velocitati quæ areæ momento mediocri est analoga.* Areæ momentum mediocre illud est quod Luna dato exiguo tempore verreret si uniformi velocitate toto suo tempore ferretur, cumque Luna per vim EL certis in locis plus minusve acceleretur, areæ momentum, seu ea areæ particula quæ dato exiguo tempore describitur, nunc major nunc minor est; sed cum orbis Lunaris circularis censeatur, areæ momenta sunt ut arcus qui sunt eorum bases, cumque iisdem temporibus illa momenta illique arcus describantur, sunt ut velocitates quibus describuntur. Hinc pro arearum momentis ipsæ velocitatum rationes assumuntur.

(q) * *Addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius.* Hic assumit Newtonus velocitatem mediocrem eam nempe quâ orbita Lunaris tempore suo Periodi-

co

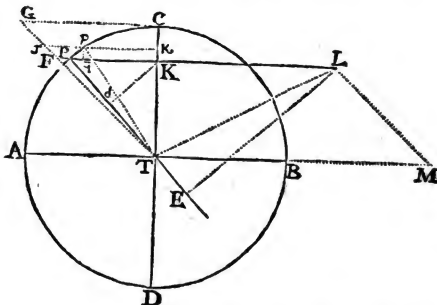
ſumma 11915+50 ſeu 11965 exhibebit momentum maximum areæ in ſyzygiâ *A*, ac differentia 11915−50 ſeu 11865 ejuſdem momentum minimum in quadraturis. Igitur areæ tempo- LIBER TERTIUS. PROP. XXVI. PROBL. VII.

ribus æqualibus in ſyzygiis & quadraturis deſcriptæ, ſunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod ſit ad momentorum differentiam 100
ut

to uniformiter deſcriberetur eſſe mediam proportionalem Arithmeticè inter velocitatem minimam & maximam. Hanc tamen propoſitionem quaſi evidentem aſſumere non licuit, ſi enim v. gr. diutius durarent parvæ velocitates quam magnæ, velocitas mediocris propior foret parvis velocitatibus quam magnis, hinc exponenda eſt prius ratio quâ creſcunt illæ velocitates, ut poſſimus aſſerere mediocrem velocitatem Lunæ eſſe mediam Arithmeticè inter extremas. Quod quidem efficere conabimur Problemate huic propoſitioni mox ſubjungendo.
111.

ut trapezium *FKCG* ad triangulum *TCG* vel (r) quod perinde est, ut quadratum sinus *PK* ad quadratum radii *TP*, id (s) est, ut *Pd* ad *TP*) & summa exhibebit momentum areæ, ubi luna est in loco quovis intermedio *P*.

Hæc omnia ita se habent, ex hypothesi quod sol & terra quiescunt, & luna tempore synodico dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvitur. Cum autem periodus synodica lunaris verè sit



dierum 29. hor. 12. & min. 44. augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis, id est, in ratione 1080853 ad 1000000. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{100}{11915}$ momenti mediocris, jam fiet ejusdem pars $\frac{100}{11023}$. Ideoque momentum areæ in quadraturâ lunæ erit ad ejus momentum in syzygiâ ut 11023−50 ad 11023+50, seu 10973 ad 11073,

112. (r) * *Vel quod perinde est ut quadratum sinus PK ad quadratum radii TP* area TCG est aream TKF ut quad. TC ad quad. TK & dividendo TCG−TKF (sive FKCG) ad TCG ut TC^2-TK^2 (sive PK^2) ad TC^2.

(s) * *Id est ut Pd ad TP* est Pd ad PK ut PK ad TP propter similitudinem Triangulorum PKd, PTK, ergo per compositionem rationum est Pd ad TP ut PK^2 ad TP^2.

11073, & ad ejus momentum, ubi luna in alio quovis loco intermedio *P* verſatur, ut 10973 ad 10973 + *Pd*, (t) exiſtente videlicet *TP* æquali 100.

LIBER TERTIUS. PROP. XXVI. PROBL. VII.

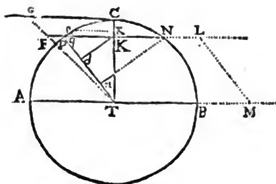
Area igitur, quam luna radio ad terram ducto ſingulis temporis particulis æqualibus deſcribit, eſt quam proximè ut ſumma numeri 219,46 & ſinus verſi duplicatæ diſtantiæ lunæ à quadraturâ proximâ, in (u) circulo cujus radius eſt unitas. Hæc ita ſe habent ubi variatio in octantibus eſt magnitudinis mediocris. Sin (x) variatio ibi major ſit vel minor, augeri debet vel minui ſinus ille verſus in eâdem ratione.

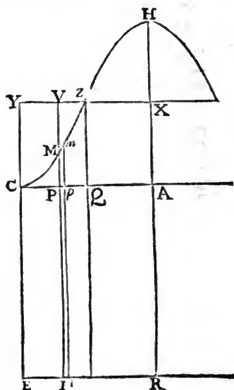
(t) * *Exiſtente videlicet TP æquali* 100, ſequitur ex præcedentibus quod illud quod debet addi ad momentum minimum 10973 eſt ad 100 ut eſt P d ad P T, ſi ergo P T ſit æqualis numero 100 erit P d æqualis illi numero qui debet addi ad momenti minimi valorem.

(u) * *Ut ſumma numeri 219.46 & ſinus verſi duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ in circulo cujus radius eſt unitas;* Areæ momentum in puncto P eſt ut 10973 + P d, eſt autem P d dimidium ſinus verſus duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ, nam dicatur N punctum in quo linea P K L ſecat circulum erit arcus P C N duplus diſtantiæ P C à quadraturâ proximâ ductaque N n perpendiculari in radium P T erit P n ſinus verſus duplicatæ illius diſtantiæ, ſed cum N n & K d ſint perpendiculares in eamdem lineam ideoque Parallelæ, & ſit punctum K medium lineæ P N erit etiam d medium lineæ P n, eritque P d = $\frac{1}{2}$ P n, ſive erit P d dimidium ſinus verſi duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ, eſt ergo momentum areæ ut ſumma numeri 10973 + $\frac{1}{2}$ P n exiſtente Radio 100, ſeu ut hujus quantitatis duplum 21946 + P n ideoque ſi Radius ſit 1 ut 219,46 + P n. 111.

(x) * 112. *Sin variatio ibi major ſit &c.* Manente eâdem Hypotheſi, Lunæ orbem eſſe circularem & Lunam aliam non pati irregularitatem præter eam quæ ab eâ parte actionis Solis naſcitur quæ per lineam E L deſignatur, variatio Lunæ erit arcus interceptus inter locum in quo Luna eſſe deberet ſi velocitate ſuâ mediocri moveretur tempore dato C P, & locum in quo reverâ eſt tunc temporis, cujus quidem variationis conditiones ex Problemate ſequenti exponere facile erit.

DE MUNDI SYSTEMATE.





PROBLEMA.

112 Ex hypothesibus & demonstratis in Propositione hâc XXVI. exponere rationem secundum quam describuntur areæ CTPA momenta.

Designet recta CA (in 2da. figurâ) tempus quo arcus CA describitur, erigantur per singula puncta P rectæ PM perpendiculares in CA & proportionales velocitati tempore CP per vim EL genitæ; Per ea quæ in hâc Propositione demonstrantur independenter ab his, illæ velocitates in punctis P arcus CP sunt ut Trapezia FKCG correspondentia, illa vero Trapezia sunt ut sinus versi duplicatæ distantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ, sive ut sinus versus arcus dupli CP, (ut mox in notis explicabitur) fiant ergo illæ perpendiculares PM æquales sinui verso arcus 2 CP, ultima perpendicularis AH erit æqualis ipsi Diametro AB, quia est sinus versus dupli quadrantis; ducatur curva CMH per omnium perpendicularium vertices transiens, ducatur etiam AR perpendicularis ad CA, sitque AH ad AR ut velocitas ultimò acquisita in A ad velocitatem uniformem quâ Lunâ ferretur si vis EL, omninò non ageret, absolvaturque Parallelogrammum AREC, productâque lineâ MP usque ad lineam RE tota linea IM erit ut velocitas Lunæ tempore CP, & ducta linea quamproxima mpi erit area MPImpi ut area descripta tempore Pp, & tota area RECMH repræsentabit totam aream tempore CA descriptam; Denique secetur AH in X & ducatur XY parallela CA quæ secet curvam CMH in Z & ex puncto Z ducatur ordinata ZQ. Liquet quod si punctum X ita sit assumptum ut Parallelogrammum XREY sit æquale mixtilineo HARECMH, erit XR velocitas Lunæ mediocris, & CQ tempus quo Luna à quadraturâ profecta ad

ad eam velocitatem mediocrem perveniet, quod quidem ex ipsâ constructione liquet. Jam autem dico quod illud punctum X incidet in medio lineæ A H, ita ut hæc velocitas mediocris X R sit media proportionalis Arithmetica inter R A & R H & præterea quod punctum Q cadet in medio inter A & C ita ut ea celeritas mediocris in octante obtineatur, (saltem si medium arcus medio temporis respondeat quod proximè verum est juxta notam 110 præcedentem).

Ut obtineatur itaque area HAPCMH, dicatur v arcus C P & dicatur $m v$ recta C P quæ arcui C P est proportionalis (saltem quam proximè per not. 110.) & P p sit $m\,dv$, sinus rectus P K arcus C P dicatur y, sinus verò totalis sit r. Ex notis Trigonometriæ Principiis sinus versus dupli arcus C P est $\frac{2yy}{r}$, ergo ordinata P M ei æqualis est $\frac{2yy}{r}$, & elementum areæ sive MPpm est $\frac{2yy}{r}m\,dv$, sed ex notâ proprietate circuli est $\sqrt{rr-yy}$ ad r ut dy ad dv est ergo $dv = \frac{r\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$ itaque areæ elementum evadit $\frac{2myydy}{\sqrt{rr-yy}}$ conferatur illud elementum cum elemento areæ circuli radio T C descripti dicatur C K, z, K k, dz, Elementum P p k K est $y\,dz$, sed est T K ($\sqrt{rr-yy}$) ad P K (y) ut P q (dy) ad $q\,p$ (dz) hinc $dz = \frac{y\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$ & elementum areæ circuli fit $\frac{yy\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$ quod Elementum est ad Elementum correspondens areæ H A P C M H ut 1 ad $2m$, hinc tota hæc area est ad aream quadrantis T C P A ut $2m$ ad 1, sive si totus arcus C P A dicatur c & recta C P A dicatur mc, area H A P C M H erit mrc. Ergo si linea A R quæ designat velocitatem uniformem Lunæ cum nulla foret vis E L, dicatur l, area A R E C erit mlc & tota area H A R E C H erit $mlc+mrc$, sive æqualis Parallelogrammo cujus unum latus foret mc alterum $l+r$, sed R E ex constructione est æqualis mc, ergo si sumatur R X $= l+r$ Parallelogrammum XREZ erit æquale mixtilineo HARECMH, ideoque erit R X sive $l+r$ velocitas Lunæ mediocris, sed erat A H $= 2r$, ideoque R H $= l+2r$ est ergo R X ($l+r$) media proportionalis Arithmeticè inter R A (l) & R H ($l+2r$), ergo velocitas mediocris Lunæ est media proportionalis Arithmeticè inter minimam velocitatem Lunæ (l) & maximam ($l+2r$).

Quoniam verò ordinata Z Q $=$ A X $= r$ est sinus versus arcus dupli C P, & est r sinus versus arcus quadrantalis, ergo in hoc casu C P ejus dimidius est octans circuli, in octante itaque obtinetur velocitas quæ est æqualis velocitati mediocri Lunæ. Quæ quidem in notâ superiore 112 demonstranda esse dixeramus.

Ex hujus autem Problematis constructione liquet aream per velocitatem mediocrem Lunæ descriptam tempore C P, exprimi per aream Y E I V, & ejus valorem esse $mlv + mrv$, dum area verè per Lunam descripta exprimetur per spatium mixtilineum C E I M; spatium C E I R est mlv, spatium verò C P M, est ad aream C P K ut $2m$ ad 1; tota area C T P est $\frac{rv}{2}$, spatium P K T est $\frac{y \times KT}{2}$, ergo area C P K est $\frac{rv - y\times KT}{2}$, est itaque spatium C P M $= mrv - my \times KT$ & tota area C E I M est $mlv + mrv - my\times KT$; Unde liquet differentiam inter aream per velocitatem mediocrem descriptam & aream reverâ descriptam esse $my \times KT$, quâ deficit area reverâ descripta, ab eâ quæ per mediocrem motum percursa censetur.

Hinc 1°. liquet variationem debere subtrahi ex motu medio à quadraturâ ad syzygiam, illam evanescere in syzygia A, quia illic $my \times KT = 0$, à syzygiâ variationem addi debere motui medio, ut patet ex figuræ continuatione.

2°. Ut

DE MUNDI SYSTEMATE.

113. 2°. Ut quantitas $mlc + mrc$ est ad Rectangulum yK × TK, ita est quadrans circuli CPAT ad aream quæ (propter variationem) detrahenda est ex areâ CTP motu mediocri descriptâ sive, quoniam CPAT est dimidium facti radii in arcum CPA, & ea area detrahenda est etiam dimidium facti radii in arcum variationis, erit etiam ut $mlc + mrc$ ad $my \times TK$ ita arcus quadrantalis CPA sive c ad arcum variationis qui itaque erit $\frac{y \times TK}{l+r}$ sive $\frac{PK \times TK}{l+r}$.

3°. Quoniam quantitates $lc + rc$, & arcus quadrantalis CPA sunt quantitates constantes, manifestum est quod variationes in omnibus punctis P, sunt ut PK×TK, sive ut factum sinus arcus CP in ejus Cosinum.

4°. Rectangulum TK×PK est maximum ubi punctum P est in octante, quod demonstratur eo modo quem in notâ 111. præcedente videre licet, hinc variatio maxima, est in octantibus, unde fluit hoc Paradoxum, ubi vis EL maxima est, illic maximè retardatur Luna respectu motus sui medii.

5°. *Si variatio maxima mutetur, augeri debet vel minui sinus ille versus, qui velocitatem genitam in* singulis punctis exprimit *in eâdem ratione;* Nam velocitas quæ generatur exprimitur per aream CKFG (vide figuram textus) in octantibus autem punctum F coincidit cum puncto P, & area CKFG illic evadit æqualis areæ PKT, ergo velocitas in octantibus genita est ut TK per PK, sed area quæ variationem illic exprimit est etiam ut TK per PK, (per hujusce notæ corol. 3.) ergo velocitas in octantibus est ut ipsa variatio in octantibus, sed velocitas in octanti-

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA VIII.

Ex motu horario lunæ invenire ipsius distantiam à terrâ.

(y) Area, quam luna radio ad terram ducto singulis temporis momentis describit, est ut motus horarius lunæ & quadratum distantiæ lunæ à terrâ conjunctim; & propterea distantia lunæ à terrâ est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione areæ directè & subduplicatâ ratione motus horarii inversè. *Q.E.I.*

Corol. 1. Hinc datur lunæ diameter apparens: quippe quæ sit reciprocè ut ipsius distantiâ à terrâ. (z) Tentent astronomi quam probè hæc regula cum phænomenis congruat.

Corol. 2. (a) Hinc etiam orbis lunaris accuratiùs ex phænomenis quàm antehac definiri potest.

PRO-

octantibus est ad velocitatem in quovis alio puncto in ratione datâ Radii ad sinum versum duplicatæ distantiæ ejus dati puncti à quadraturâ proximâ, ergo hæc velocitas crescit ut velocitas in octantibus ideoque etiam ut variatio maxima, *ergo sinus ille versus* illi velocitati proportionalis debet augeri vel minui in eâdem ratione.

Verum ex actione TM aliam variationis portionem oriri ostenditur Prop. XXIX., illam autem portionem etiam futuram ut TK×PK per not. 114. mox adjiciendam constabit, ergo tota variatio erit ut TK×PK, sive, in octantibus, ut velocitas, quare manet hujus Corollarii veritas si agatur de totâ variatione.

(y) 113. *Area quam Luna singulis momentis describit est ut motus horarius Lunæ & quadratum distantiæ Lunæ à terrâ.* Designet TPp aream descriptam à Lunâ quovis



tempusculo, sitque Pp arcus curvæ cujuslibet; centro T radio Tp describatur arcus circularis Pq qui pro rectâ perpendiculari in lineam TP assumi potest ideoque area à Lunâ descripta erit ut TP×pq, gradus autem, aut minuta in arcu pq contenta mensurabunt motum angularem Lunæ dato tempore qui æqualis est motui horario Lunæ, ideoque longitudo absoluta ejus arcus pq erit ut ejus radius TP & motus horarius Lunæ conjunctim hinc area TP×pq erit ut TP^2 & motus horarius Lunæ conjunctim. 113.

(z) * *Tentent Astronomi.* Observando nempe motum horarium Lunæ in variis temporibus ejus Periodi & simul angulum inter Solem & Lunam interceptum ut inde habeatur ejus distantia PTC à quadraturâ proximâ C, inde enim poterunt colligi numeri proportionales distantiis PT Lunæ à Terrâ, nam, per præced. Prop. area à Lunâ descripta est ut summa numeri 219.46 & sinus versi dupli anguli PTC quæ si dividatur per motum horarium qui observatione obtinetur, radix quadrata ejus quotientis erit ut distantiæ PT, & inversè ut Lunæ Diametri apparentes; Quare si hi etiam observati fuerint, collatio observationum cum numeris sic inventis Regulam Newtonianam illustrabit.

(a) * *Hinc etiam orbis Lunaris accuratiùs quam antehac definiri potest.* Or-

PROPOSITIO XXVIII. THEOREMA IX.

Invenire diametros orbis in quo luna, ſine eccentricitate, moveri deberet.

Curvatura trajectoriæ, quam mobile, ſi ſecundum trajectoriæ illius perpendiculum trahatur, deſcribit, eſt ut attractio directè & quadratum velocitatis inverſè. (b) Curvaturas linearum pono eſſe inter ſe in ultimâ proportione ſinuum vel tangentium angulorum contactuum ad radios æquales pertinentium, ubi radii illi in infinitum diminuuntur. Attractio autem lunæ in terram in ſyzygiis eſt exceſſus gravitatis ipſius in terram ſupra (c) vim ſolarem $2PK$ quâ gravitas acceleratrix lunæ in ſolem ſuperat gravitatem acceleratricem terræ in ſolem vel

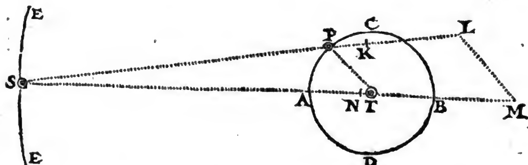
113. bis Lunaris figura definiri poteſt per obſervationes Diametrorum apparentium Lunæ in datis angulis à puncto quodam fixo, ſicque cum diſtantiæ Lunæ ſint his Diametris apparentibus reciprocæ, longitudines diſtantiis Lunæ proportionales in lateribus eorum angulorum ſecari poſſunt & per eas extremitates duci poteſt curva orbi Lunari ſimilis: Sed obſervatio Diametri cujuſlibet corporis lucidi eſt nimis lubrica ut ſatis tuta eſſe poſſit hæc Methodus, facilius tutiuſque obſervabuntur motus horarius Lunæ ejuſque diſtantia à quadraturâ proxima, hinc itaque accuratius cognita ratione diſtantiarum Lunæ à terrâ in datis angulis accuratius definietur quam antehac orbis Lunaris.

(b) *Curvaturas linearum* &c. Curvatura lineæ eſt ejus deflexio à Tangente, & æſtimari debet per Angulum inter Tangentem curvæ & curvam naſcentem interceptum; illi anguli ſunt ſemper quamminimi, ideoque, juxta principia Trigonometrica, ſuis ſinubus, ſuiſve Tangentibus ſunt proportionales, hinc Newtonus ponit curvaturas linearum eſſe in ultimâ proportione Tangentium angulorum contactus, ſi Tangentes illæ ad æquales radios referantur,

Radii illi æquales ad quos referuntur Tangentes illæ, deſcriberentur per continuationem velocitatis corporis uniformis ſecundum Tangentem curvæ, ideoque quantulicumque ſumantur tempora quibus deſcribentur erunt inverſè ut illæ velocitates, Tangentes verò anguli contactus quæ ad illos radios æquales referuntur ſunt attractionis effectus ſiquidem ſupponitur illam attractionem agere ſecundum perpendiculum ad curvam, is verò attractionis effectus eſt ſemper ut ipſa vis & quadratum temporis per quod agere concipitur ſaltem ſi tempus exiguum intelligatur in quo attractio uniformiter ad modum gravitatis agere cenſenda ſit; Ergo illæ Tangentes ſunt ut attractio directe & quadratum velocitatis inverſè, & in eâdem ratione ſunt anguli contactus ſive curvaturæ linearum.

(c) *Attractio lunæ in terram in ſyzygiis eſt exceſſus gravitatis ſupra vim ſolarem* $2PK$. Ex iis quæ in Propoſitione XXV. demonſtrata ſunt, liquet per actionem Solis, Lunam à terrâ diſtrahi ubicumque ſita ſit per vim TM, ad illam verò attrahi per vim LM, vis TM ſive PL eſt ſemper æqualis $3PK$ (vid. not. (u) ad Prop. XXV.) & eſt PL Coſinus anguli ATP qui

vel ab eâ ſuperatur. In (d) quadraturis autem attractio illa eſt ſumma gravitatis lunæ in terram & vis ſolaris KT, quâ luna in terram trahitur. Et hæ (e) attractiones, ſi $\frac{AT+CT}{2}$ dicatur N, ſunt ut $\frac{178725}{ATq} - \frac{2000}{CT \times N}$ & $\frac{178725}{CTq} + \frac{1000}{AT \times N}$ quam proximè; ſeu ut $178725\,N \times CTq - 2000\,ATq \times CT$ & $178725\,N \times ATq + 1000\,CTq \times AT$. Nam ſi gravitas acceleratrix lunæ in terram exponatur per numerum 178725, vis mediocris ML, quæ in quadraturis eſt PT vel TK & lunam trahit in terram, erit 1000, & vis mediocris TM in ſyzygiis erit



qui Coſinus in ſyzygiis eſt æqualis Radio, ita ut P T ſive L M eo in caſu ſit æqualis P K, ergo Luna attrahitur ad terram in ſyzygiis per vim gravitatis & per vim L M ſive P K, & diſtrahitur ab ea per vim 2PK, ſupereſt itaque attractioni Lunæ in terram in ſyzygiis exceſſus gravitatis ſupra vim Solarem 2 P K.

(d) *In quadraturis* autem evaneſcit vis T M, attractio ergo Lunæ in terram eſt ſumma ejus gravitatis & vis L M ſive C T ſive K T quia in quadraturis puncta K & C coincidunt.

(e) * *Et hæ attractiones ſi* $\frac{AT+CT}{2}$ *dicatur* N &c. Ex Propoſitione XXV. conſtat vim gravitatis qui Luna retinetur in orbe ſuo in mediocri ſua diſtantia N eſſe ad vim ſolarem mediocrem T M ut 178725 ad 1000, ideoque ad vim 2 P K in ſyzygiis æqualem 2 T M ut 178725 ad 2000, 1135
ſed diſtantiis AT, CT inæqualibus evadentibus variant iſtæ vires, eſt enim vis gravitatis in diſtantia N ad vim gravitatis in diſtantia A T ut $\frac{1}{N^2}$ ad $\frac{1}{AT^2}$ ideoque ſi prior exprimatur per 178725 erit poſterior $\frac{178725\,N^2}{AT^2}$, & ſimili ratiocinio vis gravitatis in diſtantia C T erit $\frac{178725\,N^2}{CT^2}$; Vires verò Solares 2 P K, K T, creſcunt ut ipſæ diſtantiæ quare ſi vis 2 P K in diſtantia N ſit 2000 in diſtantiâ A T erit $\frac{2000\,AT}{N}$, & ſi vis T M in quadraturis ſit 1000 in eâ diſtantiâ N, erit ea vis in diſ-

erit 3000; de quâ, si vis mediocris ML subducatur, manebit vis 2000 quâ luna in syzygiis distrahitur à terrâ, quamque jam ante nominavi $2PK$. Velocitas (f) autem lunæ in syzygiis A & B est ad ipsius velocitatem in quadraturis C & D, ut CT ad AT & momentum areæ quam luna radio ad terram ducto describit in syzygiis ad momentum ejusdem areæ in quadraturis conjunctim, i. e. ut $11073\,CT$ ad $10973\,AT$. (g) Sumatur hæc ratio bis inversè & ratio prior semel directè, & fiet curvatura orbis lunaris in syzygiis ad ejusdem curvaturam in quadraturis ut $120406729 \times 178725\,ATq \times CTq \times N - 120406729 \times 2000\,ATqq \times CT$ ad $122611329 \times 178725\,ATq \times CTq \times N + 122611329 \times 1000\,CTqq \times AT$, i. (h) e. ut $2151969\,AT \times CT \times N - 24081\,AT$ *cub.* ad $2191371\,AT \times CT \times N + 12261\,CT$ *cub.*

Quo-

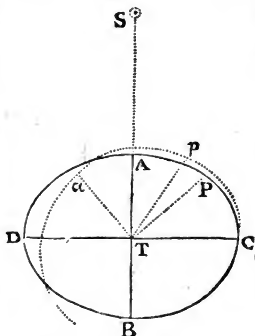
113. stantia CT, $\frac{1000\,CT}{N}$; hinc attractio in syzygiis fit $\frac{178725\,N^2}{N} - \frac{2000\,AT}{N}$, & in quadraturis $\frac{178725\,N^2}{CT^2} + \frac{1000\,CT}{N}$, sive omnia dividendo per N^2 est attractio in syzygiis $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000\,AT}{N^2 \times N}$ & in quadraturis $\frac{178725}{CT^2} + \frac{1000\,CT}{N^2 \times N}$; quoniam verò N est medium Arithmeticum inter AT & CT quorum differentia est exigua, pro medio Geometrico inter eas quantitates proximè sumi potest, ita ut sit $N^2 = AT \times CT$, quo valore substituto loco N^2 fit attractio in syzygiis $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000}{CT \times N}$ & in quadraturis $\frac{178725}{CT^2} + \frac{1000}{AT \times N}$ & reductione facta ad eosdem denominatores fiunt istæ quantitates ut $178725\,N \times CT^2 - 2000\,AT^2 \times CT$ ad $178725\,N \times AT^2 + 1000\,CT^2 \times AT$.

(f) * *Velocitas Lunæ* &c. Quoniam in syzygiis & quadraturis arcus quos Luna describit sunt perpendiculares radiis AT, CT, areæ momenta dato tempore illic descripta sunt ut illi arcus & Radii AT, CT conjunctim, ii arcus dato tempore descripti sunt ut velocitates, ergo velocitates in syzygiis & quadraturis sunt ut arearum descriptarum momenta & Radii inversè.

(g) * *Sumatur* ratio duplicata velocitatum *inversè & ratio* simplex attractionum *directè*, factâque multiplicatione ut fractiones deleantur *fiet curvatura orbis Lunaris in syzygiis ad ejusdem curvaturam in quadraturis* &c.

(h) * *i. e. ut.* Dividendo per AT×CT, numeros signo × conjunctos in se invicem multiplicando neglectisque quatuor ultimis productorum cifris.

Quoniam figura orbis lunaris ignoratur, hujus vice assumamus ellipsin $DBCA$, in cujus centro T terra collocetur, & cujus axis major DC quadraturis, minor AB syzygiis interjaceat. (i) Cum autem planum ellipseos hujus motu angulari circa terram revolvatur, & trajectoria cujus curvaturam consideramus describi debet in plano quod omni motu angulari omnino destituitur: consideranda erit figura, quam luna in ellipsi illa revolvendo describit in hoc plano, hoc est figura Cpa, cujus puncta singula p inveniuntur capiendo punctum quodvis P in ellipsi, quæ locum lunæ repræsentet, & ducendo Tp æqualem TP, eâ lege ut angulus PTp æqualis sit motui apparenti solis à tempore quadraturæ C confecto; vel (quod (l) eodem ferè recidit) ut angulus CTp sit ad angulum CTP ut tempus revolutionis synodicæ lunaris ad tempus revolutionis periodicæ seu $29^d. 12^h. 44'$, ad $27^d. 7^h. 43'$. Capiatur igitur angulus CTa in eâdem ratione ad angulum rectum CTA; & sit longitudo Ta æqualis longitudini TA; & erit a apsis ima & C apsis summa orbis hujus Cpa. Rationes autem ineundo invenio quod differentia inter curvaturam orbis Cpa in vertice a, & curvaturam circuli centro T intervallo TA descripti, sit ad differentiam inter curva-



(i) * *Cum autem planum Ellipseos hujus motu angulari circa terram revolvatur.* Axis enim minor hujus Ellipseos ad Solem perpetuò dirigitur, ideoque eodem motu quo sol circa terram revolvitur axis iste sive planum Ellipseos circa terram fertur. 113.

(l) * *Quod eodem ferè recidit* quia Lunæ motus medius ab ipsius motu vero non multùm discrepat.

vaturam ellipseos in vertice A & curvaturam ejusdem circuli; in (m) duplicatâ ratione anguli CTP ad angulum CTp; & (n) quod curvatura ellipseos in A sit ad curvaturam circuli illius,

113. (m) * *In duplicatâ ratione anguli CTP ad angulum CTp.* Centro T intervallo T A describatur circuli arcus A R a r, sit arcus A R ad arcum a r in ratione datâ anguli C T P ad angulum C T p, ducantur Radii T R, T r & producantur ita ut Tangentibus in A & a ductis occurrant in M & m, occurrant vero Ellipsi in N, & curvæ C p a in n; erit $NR = nr$, quia ex constructione T n sumitur æqualis TN, & radii T R, T r sunt æquales; Evanescentibus autem arcubus r a & R A curvatura orbis C p a in a erit ad curvaturam circuli radio T A descripti, ut m n ad m r, & ideo differentia inter curvaturam orbis C p a in a & curvaturam circuli radio T A descripti est ad curvaturam ejusdem circuli ut $mr - mn$ sive n r aut R N ad m r, simili modo patet quod curvatura circuli radio T A descripti est ad differentiam inter curvaturam Ellipseos in vertice A & curvaturam ejusdem circuli ut M R ad N R. Ideoque compositis rationibus differentia inter curvaturam orbis C p a in a & curvaturam circuli radio T A descripti, est ad differentiam inter curvaturam Ellipseos in A & curvaturam ejusdem circuli ut M R ad m r, hoc est, (Cor. I. Lem. XI. Lib. I.) in ratione duplicatâ arcus R A ad arcum r a, sive (per const.) in ratione duplicata anguli C T P ad angulum C T p.

(n) * *Et quod curvatura Ellipseos in A &c.* Curvatura Ellipseos in A est ad curvaturam circuli radio T A descripti in ratione M N ad M R; Ducatur vero N X tangenti parallela, & axi occurrens in X, & pariter R Z, erit per proprietatem Ellipseos $AX \times XB$ ad NX^2 ut TA^2 ad TC, & per proprietatem circuli erit $AZ \times ZB = RZ^2$, sed quia sumuntur quantitates nascentes est $AX = MN$, $AZ = MR$, $XB = AB = ZB$ & $NX = RZ$, quibus valoribus suo loco substitutis prima proportio evadit $MN \times AB : MR \times AB :: TA^2 : TC^2$ ideoque est M N ad M R, sive curvatura Ellipseos ad curvaturam circuli in duplicatâ ratione T A ad T C.

LIBER TERTIUS. PROP. XXVIII. PROBL. IX.

lius, in duplicatâ ratione *TA* ad *TC*; & (o) curvatura circuli illius ad curvaturam circuli centro *T* intervallo *TC* descripti, ut *TC* ad *TA*; (p) hujus autem curvatura ad curvaturam ellipseos in *C*, in duplicatâ ratione *TA* ad *TC*; & (q) differentia inter curvaturam ellipseos in vertice *C* & curvaturam circuli novissimi, ad differentiam inter curvaturam figuræ *Cpa* in vertice *C* & curvaturam ejusdem circuli, in duplicatâ ratione anguli *CTp* ad angulum *CTP*. Quæ quidem rationes ex sinubus angulorum contactus ac differentiarum angulorum facile colliguntur. His (r) autem inter se collatis, prodit curvatura figuræ

(o) * *Curvatura circuli* &c. Nam circulorum curvaturæ sunt inversè ut eorum radii (not. 121. lib. 1.).

(p) * *Hujus autem curvatura*, potest demonstrari eo ipso modo quo demonstravimus rationem curvaturæ Ellipseos in A ad curvaturam circuli radio TA descripti (not. n).

(q) * *Et differentiam inter curvaturam Ellipseos in vertice* C &c. Demonstratio ferè eadem est ac in notâ (m): Centro C intervallo TC describatur circuli arcus CRr, sit arcus CR ad arcum Cr, in ratione anguli CTP ad angulum CTp ducatur Tangens CMm, & Radii TRM, Trm quorum prior occurrat Ellipsi in N, posterior curvæ Cpa in n, erit NR = nr propter æquales TN, Tn per curvæ const. & Radios æquales TR, Tr; Evanescentibus arcubus CN, Cn, curvatura Ellipseos in C est ad curvaturam circuli radio TC descripti ut MN ad MR, ideoque curvaturarum Ellipseos & circuli differentia est ad curvaturam circuli ut RN ad MR, simili modo curvatura circuli est ad curvaturam orbis Cpa ut mr ad mn, ideoque curvatura circuli ad differentiam curvaturarum orbis Cpa & circuli ut mr ad rn: itaque compositis rationibus erit curvaturarum Ellipseos & circuli differentia ad curvaturarum orbis Cpa & circuli differentiam ut mr ad MR hoc est in ratione duplicata arcus rC ad arcum RC, sive in ratione duplicatâ anguli CTp ad angulum CTP. 113.

(r) *His autem inter se collatis* &c. Ut pateat ordo quo istæ rationes componuntur, dicatur *s* tempus revolutionis Synodicæ, & *t* tempus revolutionis Periodicæ, eritque angulus CTP ad angulum CTp ut *t* ad *s*.

guræ $C p a$ in a ad ipsius curvaturam in C, ut AT *cub.* $+ \frac{16824}{100000} CTq \times AT$ ad CT *cub.* $+ \frac{16824}{100000} ATq + CT$. Ubi numerus $\frac{16824}{100000}$ designat differentiam quadratorum angulorum CTP & CTp applicatam ad quadratum anguli minoris CTP, seu (quod perinde est) differentiam quadratorum temporum $27^{d}. 7^{h}. 43'$, & $29^{d}. 12^{h}. 44'$, applicatam ad quadratum temporis $27^{d}. 7^{h}. 43'$.

Igitur cum a designet syzygiam lunæ, & C ipsius quadraturam proportio jam inventa eadem esse debet cum proportione curvaturæ orbis lunæ in syzygiis ad ejusdem curvaturam in quadraturis, quam supra invenimus. Proinde ut inveniatur proportio CT ad AT, duco extrema & media in se invicem. Et termini prodeuntes ad $AT \times CT$ applicati, fiunt $2062{,}79\, CTqq - 2151969\, N \times CT\,cub. + 368676\, N \times AT \times CTq + 36342\, ATq \times CTq - 362047\, N \times ATq \times CT + 2191371\, N \times AT\,cub. + 4051{,}4\, ATqq = 0$. Hic pro terminorum AT & CT semisumma N scri-

113. (1) Differentia curvaturarum orbis Cpa in a & circuli radio TA descripti, est ad differentiam curvaturarum Ellipseos in A & ejusdem circuli ut tt ad ss (not. m).

(2) Curvatura Ellipseos in A ad curvaturam circuli radio TA descripti ut TA^2 ad TC^2 (not. n).

(3) Hinc dividendo, differentia curvaturarum Ellipseos in A & circuli est ad curvaturam ejusdem circuli ut $TC^2 - TA^2$ ad TC^2: & per compositionem 1æ. & 3æ. proportionis

(4) Est differentia curvaturarum orbis Cpa in a & circuli radio TA descripti ad curvaturam ejusdem circuli ut $tt \times \overline{TA^2 - TC^2}$ ad $ss \times TC^2$,

(5) Hinc, convertendo curvatura orbis Cpa in a ad curvaturam circuli radio TA descripti ut $ss\, TC^2 - tt \times \overline{TC^2 - TA^2}$ ad $ss \times TC^2$.

(6) Curvatura circuli radio TA descripti, ad curvaturam circuli radio TC descripti ut TC ad TA.

(7) Curvatura circuli radio TC descripti ad curvaturam Ellipseos in C ut TA^2 ad TC^2.

(8) Hinc, convertendo curvatura circuli radio TC descripti ad differentiam curvaturarum ejus circuli & Ellipseos in C ut TA^2 ad $TC^2 - TA^2$.

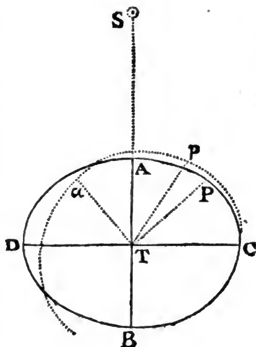
(9) Differentia curvaturarum ellipseos in C & ejus circuli radio TC descripti ad differentiam curvaturarum figuræ Cpa in C & ejusdem circuli ut ss ad tt; & per compositionem 8æ. & 9æ. proportionis est

(10) Curvatura circuli radio TC descripti ad differentiam curvaturarum figuræ Cpa in C & ejusdem circuli ut $TA^2 \times s^2$ ad $tt \times \overline{TC^2 - TA^2}$.

(11) Et convertendo curvatura circuli radio TC descripti ad curvaturam figuræ Cpa in C ut $TA \times s^2$ ad $TA^2 \times s^2 + tt \times \overline{TC^2 - TA^2}$.

Hinc tandem ex æquo & per compositionem 5æ. 6æ. & hujus 11æ. proportionis, est curvatura orbis Cpa in a, ad ejus curvaturam in C ut $s^2 \times TC^2 - tt \times \overline{TC^2 - TA^2}$ $\times TC$

ſcribo 1; & pro eorundem ſemidifferentia ponendo x, fit $CT = 1 + x$, & $AT = 1 - x$: (f) quibus in æquatione ſcriptis, & æquatione prodeunte reſolutâ, obtinetur x æqualis 0,00719, & inde ſemidiameter CT fit 1,00719, & ſemidiameter AT 0,99281, qui numeri ſunt ut $70\frac{1}{24}$ & $69\frac{1}{24}$ quam proximè. (t) Eſt igitur diſtantia lunæ à terrâ in ſyzygiis ad ipſius diſtantiam in quadraturis (ſepoſitâ ſcilicet eccentricitatis conſideratione) ut $69\frac{1}{24}$ ad $70\frac{1}{24}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.



PRO-

$\times TC \times TA^2 \times s^2$ ad $s^2 \times TC^2 \times TA \times (TA^2 \times s^2 + tt \times (TC^2 - TA^2))$ quæ diviſa per $s^2 \times TC \times TA$ fiunt ut $s^2 - tt \times TC^2 \times TA + t^2 \times TA^3$ ad $s^2 - tt \times TA^2 \times TC + tt \times TC^3$, omnibuſque diviſis per tt & inverſo terminorum ordine fiunt ut $TA^3 + \frac{s^2 - tt}{tt} \times TC^2 \times TA$ ad $TC^3 + \frac{s^2 - tt}{tt} \times TA^2 \times TC$. Q. E. I.

(f) *Quibus in æquatione ſcriptis.* Hæc æquatio fit $42456.19\ x^4 - 5082017.44\ x^3 + 148262.14\ x^2 - 12307251.44\ x + 88487.19 = 0$, ſed cum x debeat eſſe quantitas exigua omnes terminos præter duos ultimos negligit, & ex æquatione $12307251.44\ x = 88487.19$ valorem obtinet $x = \frac{88487.19}{12307251.44} = 0.00719$.

(t) * *Eſt igitur diſtantia Lunæ à Terrâ* &c. Aſtronomis eſt cognitum, quod ſi diſtantia mediocris Lunæ à Terra incidat in tempus ſyzygiarum, ea diſtantia mediocris minor erit quam ſi incidat in tempus quadraturarum; Clar. Halleius ex obſervationibus Aſtronomicis deduxit diſtantiam mediocrem Lunæ à Terrâ in Syzygiis eſſe ad ipſius diſtantiam mediocrem in quadraturis ut $44\frac{1}{2}$ ad $45\frac{1}{2}$; quod ſi vel tantillùm propter obſervationum lubricitatem de hoc ultimo numero detrahatur facile accedit hæc ratio ad eam quam Newtonus deprehendit ſuo calculo.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA X.

Invenire variationem lunæ.

(u) Oritur hæc inæqualitas partim ex formâ ellipticâ orbis lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam luna radio ad terram ducto describit. Si luna *P* in ellipsi *DBCA* circa terram in centro ellipseos quiescentem moveretur, & radio *TP* ad terram ducto describeret aream *CTP* tempori proportionalem; esset autem ellipseos semidiameter maxima *CT* ad semidiametrum minimam *TA* ut 70 ad 69: (x) foret tangens anguli *CTP* ad tangentem anguli motus medii à quadraturâ *C* com-

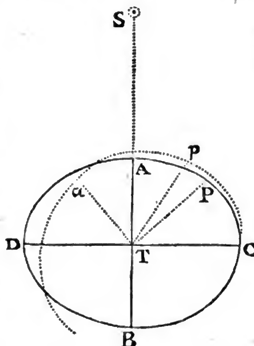
413. (u) * *Oritur hæc linæqualitas*, &c. Pergit Newtonus in hypothesi quod semotâ Solis actione orbis Lunæ circularis foret; in præcedenti verò Propositione, determinavit quamnam mutationem induceret illi circulo vis Solis, quâtenus ea ejus portio assumitur quæ ad centrum terræ spectat & cum gravitate Lunæ versus terram sociatur; itaque, sumpto novam figuram orbis Lunaris ad Ellipsim posse revocari, demonstrat in Prop. præcedente eam Ellipsim talem esse ut axis major sit ad minorem ut 70 ad 69; Motus autem Lunæ in tali Ellipsi debet fieri ita ut areæ descriptæ circa centrum terræ sint temporibus proportionales, quia vires quæ assumuntur ad id centrum diriguntur; cumque areæ illæ Ellipticæ, angulis in centro factis proportionales non sint, sequitur illos angulos in centro factos temporibus proportionales non esse, ideoque aliquid corrigendum esse motui medio Lunæ, in quo Anguli in centro terræ facti proportionales temporibus assumuntur, ut habeatur Lunæ motus Verus; & hæc correctio constituet partem variationis, quæ est, in hâc hypothesi, arcus interceptus inter locum medium Lunæ & locum ejus verum & hæc pars variationis *ex formâ ellipticâ* quam assumit *orbis Lunaris* per Solis actionem *oritur*.

Altera pars variationis oritur ex eâ actionis Solis parte quam consideravit Newtonus Prop. XXVI. & quâ fit ut ipsæ areæ à Lunâ descriptæ temporibus non sint proportionales, area itaque tempori proportionalis corrigenda est, idque detrahendum vel addendum quod debetur illi actioni, quodque per constructionem Probl. nostri n. 110. determinare facillimum erit, quam quidem constructionem non dedit Newtonus, quasi mediocribus uteretur quantitatibus ex æquo, ut aiunt, & bono assumptis, verum vix dubitandum quin ad hanc vel similem constructionem respexerit, ii enim non erant casus quibus hæc media sine demonstratione assumi possent à Viro summe accurato & perspicace.

(x) * *Foret Anguli Tangens.* Sit C A D B ellipsis quam Luna describit, ita ut areæ circa centrum T sint temporibus proportionales, describatur circulus eodem centro, radio T C, in ejus circuli circumferentia moveatur Luna motu medio, sumaturque in eo circulo arcus C Π tempori cuivis dato proportionalis, ducta ordinata Π P K, dico quod area Elliptica T C P erit tempori proportionalis hoc est quod tota area Elliptica erit ad eum sectorem T C P ut est tempus Periodicum Lunæ ad tempus datum.

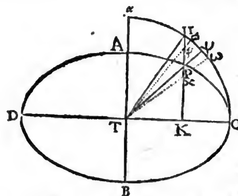
Est enim tota circuli circumferentia ad arcum C Π, sive totus circulus ad aream C T

computati, ut ellipſeos ſemidiameter *T A* ad ejuſdem ſemidiametrum *T C* ſeu 69 ad 70. (y) Debet autem deſcriptio areæ *C T P*, in progreſſu lunæ à quadraturâ ad ſyzygiam, eâ ratione accelerari, ut ejus momentum in ſyzygiâ lunæ ſit ad ejus momentum in quadraturâ ut 11073 ad 10973, utque exceſſus momenti in loco quovis intermedio *P* ſupra momentum in quadraturâ ſit ut quadratum ſinus anguli *CTP*. Id quod ſatis accuratè fiet, ſi tangens anguli diminuatur in ſubduplicatâ ratione numeri 10973 ad numerum 11073,



C T Π, ut tempus Periodicum totum ad tempus datum ex conſtructione, ſed ex notâ circuli & Ellipſeos proprietate, eſt tota area elliptica ad totam aream circuli ut T A ad C T, & pariter eſt ſector CTP ad C T Π ut T A ad C T (nam Triangula Rectilinea T P K, T Π K ſunt ut baſes PK, Π K; areæ curvilineæ CPK, C Π K ſunt etiam, ex notâ Ellipſeos & circuli proprietate ut P K ad Π K, ergo toti ſectores C T P, C T Π ſunt ut P K ad Π K, quæ ſunt ut T A ad C T,) ergo tota area Elliptica eſt ad aream circuli ut ſector C T P ad C T Π, & alternando, tota area Elliptica ad ſectorem C T P, ut eſt circuli area ad C T Π, ſeu ut eſt Tempus Periodicum, ad tempus datum.

Si ergo area C T P ſit tempori proportionalis, motus Lunæ qui à terrâ videri debuiſſet ſub angulo C T Π ſi Luna motu medio fuiſſet lata, videbitur ſub angulo C T P, & ſi linea T K pro radio aſſumatur erit K P tangens anguli C T P, &



K Π tangens Anguli C T Π, ſed eſt P K ad Π K ut T A ad C T, ergo *tangens anguli CTP eſt ad tangentem anguli motus medii ut T A ad T C ſeu 69 ad 70.* 113.

(y) * *Debet autem deſcriptio areæ* &c. Manentibus iis omnibus quæ in notis 112. & 113., expoſita fuerunt, arcus variationis erit $\frac{PK \times TK}{l+r}$ (per cor. 2. not. 113.) ſumatur ergo in arcu C Π verſus C arcus

DE MUNDI SYSTEMATE. 11073, id est, in ratione numeri 68,6877 ad numerum 69. Quo pacto tangens anguli *CTP* jam erit ad tangentem motus medii ut 68,6877 ad 70, & angulus *CTP* in octantibus, ubi motus medius est 45^{gr}. invenietur $44^{gr}. 27'. 28''$. qui subductus de angulo motus medii 45^{gr}. relinquit (z) variationem maximam $32'. 32''$. Hæc ita se haberent si luna, pergendo à quadraturâ ad syzygiam, describeret angulum *CTA* graduum tantum nonaginta. Verum ob motum terræ, quo sol in consequentia motu apparente transfertur, luna, priusquam solem assequi-

114 $\Pi\varpi = \frac{PK \times TK}{l+r}$ sive (quia in hâc figura Π respondet litteræ P in not. 110 assumptæ) $= \frac{\Pi K \times TK}{l+r}$, ducatur ϖT quæ secet lineam ΠK in φ Triangulum Πϖφ simile erit Triangulo TKφ, sive propter exiguitatem anguli ΠTϖ Triangulum Πϖφ simile erit Triangulo TKΠ, hinc erit TK ad TΠ (*r*) sicut Πϖ $\left(\frac{\Pi K \times TK}{l+r}\right)$ ad Πφ quod erit itaque $\frac{r \times \Pi K}{l+r}$, ideoque erit Kφ ($= \Pi K - \Pi\varphi$) $= \frac{\overline{l+r} \times \Pi K - r \times \Pi K}{l+r} = \frac{l \times \Pi K}{l+r}$, unde habetur hæc proportio $l+r : l :: \Pi K : \varphi K$; si verò sumatur TK pro radio, erit ΠK Tangens motus medii & φK Tangens motus medii imminuti hac variationis portione; Debet minui in eadem ratione quam proximè, Tangens PK motus Lunæ in Ellipsi spectatæ aut saltem in ratione paulo minore; cum itaque $l+r$, sit medium Arithmeticum inter $l+2r$ sive 11073 & *l* sive 10973, & ratio medii Arithmetici ad minimum extremorum sit paulo major quam medii Geometrici ad eum extremum, satis accurate fieri dicit si sumatur Tangens PK ad Tangentem anguli motus veri Lunæ ut medium Geometricum inter 11073 & 10973 ad 10972, sive in subduplicatâ ratione 11073 ad 10973; quæ est æqualis rationi 69 ad 68,6877 cum ergo sit ΠK ad PK ut 70 ad 69, & cum sit PK ad Tangentem motus Lunæ ultimò correcti ut 69 ad 68 6877 erit ex æquo Tangens motus medii ad Tangentem motus veri ut 70 ad 68,6877. Q. E. D.

(z) 114. *Relinquit variationem maximam.* Ex Cor. 4. not. 113. arcum variationis quæ pendet ex inæqualitate momentorum areæ, maximum esse in octantibus constat; Eam autem variationis portionem quæ pendet ex formâ Ellipticâ orbis Lunaris etiam maximam esse in octantibus hoc modo patet, producatur TP in Ψ & cum arcus ΠΨ vix excedat semigradum ubi maximus est pro recta sumatur, erit Triangulus ΠΨP similis Triangulo TKP; sive TKΠ ideoque est TΠ ad TK ut ΠP ad ΠΨ qui erit ergo ubivis æqualis $\frac{\Pi P \times TK}{T\Pi}$, sed quoniam est ubivis 70 ad 69 ut ΠK ad PK, erit dividendo 70 ad 1 ut ΠK ad

quitur, deſcribit angulum CTa angulo recto majorem in ratione temporis revolutionis lunaris ſynodicæ ad tempus revolutionis periodicæ, id eſt, in ratione $29^d. 12^h. 44'$. ad $27^d. 7^h. 43'$. Et hoc pacto anguli omnes circa centrum T dilatantur in eâdem ratione, & variatio maxima quæ ſecus eſſet $32'. 32''$, jam aucta in eâdem ratione fit $35'. 10''$.

Hæc eſt ejus magnitudo in mediocri diſtantiâ ſolis à terrâ, (a) neglectis differentiis quæ à curvaturâ orbis magni majorique ſolis actione in lunam falcatam & novam quam in gibboſam & plenam, oriri poſſint. In (b) aliis diſtantiis ſolis à ter-

ad II P ideoque eſt $\text{II P} = \frac{\text{II K}}{70}$ & arcus $\text{II}\Psi$ erit $\frac{\text{II K} \times \text{TK}}{70\,\text{T II}}$, jam autem demonſtratum eſt nota 111. quod maximum hujus quantitatis $\text{II K} \times \text{T K}$ eſt in octantibus, ergo arcus $\text{II}\Psi$ ſive ea variationis portio quæ pendet ex formâ Ellipticâ orbis Lunaris eſt maxima in Octantibus ſicut & altera portio, ergo Variatio tota eſt maxima in Octantibus.

(a) * *Neglectis differentiis quæ à curvatura orbis magni oriri poſſint.* Hactenus ſuppoſitum eſt, lineam D T C repræſentare orbis magni portionem, & fieri quadraturas in punctis D & C; quod quidem abſolutè verum non eſt, quippe ſemi-Diameter orbis Lunaris ſub Angulo 10 circiter minutorum à Sole videtur, unde arcus D C eſt 20' circiter & aliquam habet curvaturam, hinc revera utraque quadratura eſt circiter 20' propior conjunctioni quam oppoſitioni, quæ conſideratio hic neglecta eſt.

Majorique Solis actione in Lunam falcatam & novam quam in gibboſam & plenam, ſi vis Solis in punctum T exprimatur per $\frac{1}{ST^2}$ erit vis in Lunam novam & falcatam ut $\frac{1}{(ST - TA)^2}$ & vis in Lunam plenam & gibboſam ut $\frac{1}{(ST + TA)^2}$ revocentur omnia ad communem denominationem erit vis in punctum T ut $\overline{ST - TA}^2 \times \overline{ST + TA}^2$ ſive $ST^4 - 2ST^2 \times TA^2 + TA^4$, vis in Lunam novam $ST^4 + 2ST^3 \times TA + TA^2 \times ST^2$, vis in Lunam plenam $ST^4 - 2ST^3 \times TA + ST^2 \times TA^2$; Hinc exceſſus vis in Lunam novam ſupra vim mediocrem eſt $2ST^3 \times TA + 3ST^2 \times TA^2 - TA^4$; Et exceſſus vis mediocris ſupra vim in Lunam plenam eſt $2ST^3 \times TA - 3ST^2 \times TA^2 + TA^4$, qui quidem exceſſus differunt, & prior poſteriorem ſuperat quantitate $6ST^2 \times TA^2 - 2TA^4$; Verum propter magnitudinem lineæ ST præ linea TA, evaneſcit ferè hæc exceſſuum differentia reſpectu quantitatis communis $2ST^3 \times TA$, ideo pro æqualibus fuerunt habiti. 114.

(b) *In aliis diſtantiis Solis à Terrâ.* Duplex eſt cauſa quæ errores ab actione Solis pendentes mutet, primum vis ſolis mediocris mutatur inverſè ut quadrata diſtantiarum & præterea cum Sol celerior vel tardior fiat prout propior eſt vel remotior à Terra, Luna è converſo ipſum tardius vel celerius attingit, unde menſis Synodicus in Perigæo Solis fit longior quam idem menſis Synodicus in Apogæo; ex hac ultimâ cauſâ, ſi ſola conſideretur, fiet ut variatio maxima in ratione duplicatâ temporis revolutionis Synodicæ creſcat, quod quidem ſeparatim demonſtrandum de utrâque variationis portione $\text{II}\Psi$ & $\Psi\omega$; Et quidem in Octantibus cum Triangulum $\text{II P}\Psi$ ſit Rectangulum Iſoſceles, eſt $\text{II}\Psi = \frac{\text{II P}}{\sqrt{2}}$, eſt verò $\text{II P} = \frac{\alpha A}{\sqrt{2}}$, nam ex naturâ circuli & Ellipſeos

DE MUNDI SYSTEMATE.

râ, variatio maxima eſt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione temporis revolutionis ſynodicæ lunaris (dato anni tempore) directè, & triplicatâ ratione diſtantiæ ſolis à terrâ inversè. (c) Ideoque in apogæo ſolis, variatio maxima eſt 33′. 14″, & in ejus perigæo 37′. 11″, ſi modo eccentricitas ſolis ſit ad orbis magni ſemidiametrum tranſverſam ut $16\frac{11}{16}$ ad 1000.

Hac-

114. eſt αT ad AT ut ΠK ad PK & dividendo αT ad αA ut ΠK ad $\Pi P = \frac{\alpha A \times \Pi K}{\alpha T}$ ſed in octante eſt $\Pi K = \frac{\alpha T}{\sqrt{2}}$ ergo $\Pi P = \frac{\alpha A \times \alpha T}{\alpha T \sqrt{2}} = \frac{\alpha A}{\sqrt{2}}$ hinc $\Pi \Psi = \frac{\alpha A}{2}$, eſt autem αA effectus virium Solis Lunam retrahentium à ſuo circulo, durante quartâ parte temporis revolutionis Synodicæ Lunæ, ergo ſi id tempus creſcat manentibus iiſdem viribus ſimiliter agentibus, effectus totus αA erit ut quadratum temporis per quod illæ vires egerunt per Cor. I. Lem. X. lib. I. ideoque $\Pi \Psi$ creſcit ſecundum quadrata temporum.

Idem demonſtrabitur de portione variationis $\Psi \omega$ quæ pendet ex acceleratione deſcriptionis areæ; Quippe manentibus omnibus ut in not. 111. & fig. 32. recta CA majus tempus deſignare cenſeatur, & partes Pp tempuſcula in eadem ratione longiora, lineæ PM deſignant velocitates genitas durante momento Pp, ſi ergo id momentum creſcat viribus generatricibus iiſdem manentibus, velocitates genitæ PM creſcent in proportione temporis, & quia PpMm deſignat ſpatiolum illâ velocitate percurſum, creſcuntque & PM & Pp in ratione temporum, creſcet PMmp in ratione duplicatâ temporum, cumque ſingula elementa curvæ in eâ proportione creſcant, & tota area CAH, & æqualis CAXY, ejuſque dimidia CQZY in eâdem proportione creſcent; ex quâ ſi detrahatur CQZ quod in eâdem proportione crevit, reliquum CZY quod areæ variationi maximæ $\Psi T \omega$ eſt proportionale creſcet etiam in eâdem duplicatâ ratione temporum, manente itaque radio $T\omega$, ipſe arcus $\Psi\omega$ creſcet in duplicatâ ratione temporum.

Hinc cum $\Pi \Psi$ creſcat in duplicatâ ratione temporum tum etiam $\Psi \omega$, ſumma itaque $\Pi \omega$ ſive tota variatio creſcet in eâdem duplicatâ temporum ratione.

Dico præterea quod ſi ſpectetur imminutio actionis Solis propter auctam diſtantiam variatio maxima decreſcet in ratione triplicatâ diſtantiarum, nam deſignetur vis mediocris Solis per $\frac{1}{SK^2}$, eſt ex conſtructione SK ad TM ut vis Solis ſive ut $\frac{1}{SK^2}$ ad vim TM ergo ea vis TM eſt ut $\frac{TM}{SK^3}$ manente ergo TM quæ eſt æqualis PT; vis TM ex actione Solis pendens decreſcit ut diſtantiarum cubus augetur, Manente ergo tempore, ſed vi mutatâ ſecundum rationem triplicatam, eadem ferè ratione ac prius oſtendetur utramque variationis maximæ partem $\Pi \Psi$ & $\Psi \omega$ forè inversè in ratione triplicatâ diſtantiarum Solis; *Hincque in variis Solis à terrâ diſtantiis quæ in* datis anni temporibus recurrunt *variationes maximæ erunt inter ſe in ratione duplicatâ durationis menſis Synodici eo tempore, & triplicatâ inversè diſtantiæ ſolis à terrâ.*

(c) * *Ideoque* &c. Ex his & præcedentibus facile intelligitur Newtoni calculus, ſi prius hæc Principia revocentur.

1°. Si dicatur m diſtantia mediocris Solis, ſit $\pm e$ exceſſus vel defectus ejus diſtantiæ à mediocri diſtantiâ in loco quovis dato; denique dicatur s ſolis motus horarius mediocris, dico quod ſolis motus

Hactenus variationem investigavimus in orbe non eccentrico, in quo utique luna in octantibus suis semper est in mediocri suâ distantiâ à terrâ. Si luna propter eccentricitatem suam, magis vel minus distat à terrâ quam si locaretur in hoc orbe, varia- tio

LIBER TERTIUS. PROP. XXIX. PROBL. X.

tio

tus horarius in loco quovis suæ orbitæ exprimetur per quantitatem $\frac{m^2 s}{\overline{m \pm e}^2}$.

Sit enim T Terra; P, Sol; T P p area horæ tempore descripta, ejus areæ valor ubivis erit semper idem, sit p q arcus ra-



dio T p descriptus, qui ob exiguitatem sumi potest ut ipsum perpendiculum in basim PT demissum, ideoque ob areas ubivis æquales is arcus erit ubivis inversè ut basis T P, sed numerus graduum ejus arcus p q est directè ut is ipse arcus & inversè ut ejus radius T p sive T P, ergo numerus graduum ejus arcus p q est in ratione duplicatâ inversa radii T P, is verò numerus exprimit motum Solis horarium, ergo Solis motus horarius, est inversè ut quadratum radii T P; cum ergo in distantiâ mediocri est T P = m, in quâvis aliâ distantiâ est T P = $m \pm e$, ergo est $\frac{1}{m^2}$ ad $\frac{1}{(m \pm e)^2}$ ut s ad $\frac{s m^2}{(m \pm e)^2}$ quod exprimit motum horarium Solis in quâvis distantiâ T P.

In distantiâ mediocri evanescit quantitas $\pm e$ ideoque motus horarius illic evadit $\frac{m^2 s}{m^2} = s$ secundum hypothesim.

2°. Posito Lunam semper moveri motu suo horario mediocri, qui dicatur l, sitque p ejus tempus Periodicum inter fixas, Duratio mensis Synodici quovis in loco orbitæ telluris circa Solem, exprimetur per quantitatem $\frac{\overline{m \pm e}^2 \times l p}{\overline{m \pm e}^2 l - m^2 s}$ sive divisâ hâc quantitate per constantem $\frac{l p}{m^2}$ fiet mensis Synodicus ut $\frac{\overline{m \pm e}^2}{l - s \pm \frac{2 l e}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$. 114

Nam dicatur x numerus graduum quem Sol emetitur durante quovis mense Synodico, numerus graduum quem Luna eodem tempore emetietur erit $360 + x$, erit ergo motus horarius Lunæ l ad motum horarium Solis $\frac{m^2 s}{\overline{m \pm e}^2}$ ut $360 + x$ ad x, & dividendo $m^2 l \pm 2 m e l + e^2 - m^2 s$ ad $m^2 s$ ut 360 ad x, itaque erit $x = \frac{360 m^2 s}{m^2 l \pm 2 m e l + e^2 l - m^2 s}$. Hinc cùm Luna percurrat 360 gr. tempore p, absolvet $360^{gr.} + \frac{360 m^2 s}{m^2 l \pm 2 m e l + e^2 - m^2 s}$ tempore $p + \frac{m^2 s p}{m^2 l \pm 2 m e l + e^2 l - m^2 s}$ sive reductione facta, tempore $\frac{m^2 l p \pm 2 m e l p + e^2 l p - m^2 s p + m^2 s p}{m^2 \pm 2 m e l + e^2 l - m^2 s}$ sive $\frac{\overline{m \pm e}^2}{l - s \pm \frac{2 e l}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}} \times \frac{l p}{m^2}$ quæ quantitas divisa per constantem $\frac{l p}{m^2}$, relinquit quantitatem $\frac{\overline{m \pm e}^2}{l - s \pm \frac{2 e l}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$ quæ erit ut duratio mensis Synodici in distantiâ quavis $m \pm e$. Q. E. D.

In distantia mediocri evanescente quantitate $\pm e$ mensis Synodicus erit $\frac{m^2 l p}{m^2 l - m^2 s} = \frac{l p}{l - s}$ & erit ad menses Synodicos in

aliis

DE MUNDI SYSTEMATE. tio paulo major esse potest vel paulo minor quam pro regulâ hic allatâ: sed excessum vel defectum ab astronomis per phænomena determinandum relinquo.

114. aliis quibusve distantiis ut $\frac{m^2}{l-s}$ ad $\frac{\overline{m \pm e}^2}{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l^2}{m^2}}$

3°. Variatio maxima erit ubivis ut $\frac{m \pm e}{\overline{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l^2}{m^2}}^2}$: Nam, ex hâc ipsâ Propositione variatio maxima est directè ut quadratum temporis Synodici & inversè ut cubus distantiæ sive in ratione compositâ quantitatum $\frac{\overline{m \pm e}^4}{\overline{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l^2}{m^2}}^2}$ & $\frac{1}{\overline{m \pm e}^3}$ ideoque ut $\frac{m \pm e}{\overline{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l^2}{m^2}}^2}$.

Coroll. In distantiâ mediocri variatio maxima exprimitur per quantitatem $\frac{m}{\overline{l-s}^2}$ & eam superius determinavit Newtonus ferè 35″ 10‴ sive 2110‴; Hinc itaque ut habeatur variatio maxima in quovis orbitæ Solaris puncto fiat ut $\frac{m}{\overline{l-s}^2}$ ad $\frac{m \pm e}{\overline{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l^2}{m^2}}^2}$ ita 2110‴ ad variationem maximam quæsitam, quæ itaque erit $\frac{\overline{l-s}^2}{\overline{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l^2}{m^2}}^2} \times \frac{m \pm e}{m} \times 2110‴$, (sive accuratius $\times$ 2109‴.8.)

Ratio autem motus horarii Lunæ l ad motum horarium Solis s obtinetur ex tempore Periodico utriusque inter stellas fixas, itaque cum tempus Periodicum Lunæ sit 27^d. 7^h. 43′ & annus sidereus Solis 365^d. 6^h. 9′ & velocitates mediocres sive motus horarii mediocres sint inversè ut ista tempora Periodica erit l ad s ut 1.081 ad 0.81 ideoque erit $l - s = 1$, & Variationis maximæ expressio fiet $\frac{1}{\overline{1 \pm \frac{2.162\,e}{m} + \frac{1.081\,e^2}{m^2}}^2} \times \frac{m \pm e}{m} \times$ 2109.8‴. Cumque m sit 1000 & in Apogæo $\frac{m+e}{m}$ sit 1.016 $\frac{15}{16}$ in Perigæo vero sit $\frac{m-e}{m} = .983\frac{15}{16}$ hæc ducta in 2109.8‴ efficiunt in Apogæo 2145.5‴ & in Perigæo 2074‴, sed cum sit $e = 16\frac{15}{16}$ quantitas $\frac{2.162\,e}{m}$ evadit .036618875 & $\frac{1.081\,e}{m^2}$ est .00031027. Unde quantitas $1 + \frac{2.162e^2}{m} + \frac{1.081\,e^2}{m^2}$ fit 1.03665 & $1 - \frac{2.162e}{m} + \frac{1.081e^2}{m^2}$ fit .9637.

Dividatur ergo bis 2145′.5‴ per 1.037 quotiens dabit variationem maximam in Apogæo 1994‴ sive 33″. 14‴, & dividatur bis 2074‴ per .964 quotiens dabit variationem maximam in Perigæo quam proximè 2231 sive 37″ 11‴.

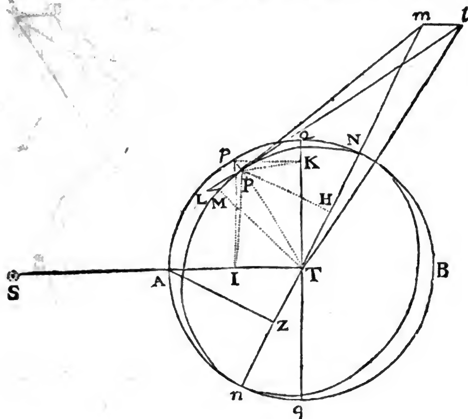
PRO-

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XI.

LIBER TERTIUS. PROP. XXX. PROBL. XI.

Invenire motum horarium nodorum lunæ in orbe circulari.

Designet S solem, T terram, P lunam, NPn orbem lunæ, Npn (d) vestigium orbis in plano eclipticæ; N, n nodos,



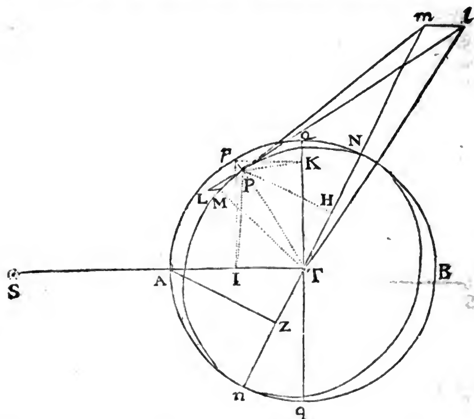
$nTNm$ lineam nodorum infinitè productam; PI, PK perpendicula demissa in lineas ST, Qq; Pp perpendiculum demissum in planum eclipticæ; A, B syzygias lunæ in plano eclipticæ; AZ perpendiculum in lineam nodorum Nn; Q, q quadraturas lunæ in plano eclipticæ, & pK perpendiculum in lineam

Qq

(d) * *Vestigium orbis in plano Ecliptica.* Hoc est orbis genitus demittendo ex singulis punctis orbitæ Lunaris perpendicula ad planum Eclipticæ. 114.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Q q quadraturis interjacentem. Vis solis ad perturbandum motum (per prop. xxv.) duplex est, altera lineæ *L M* in schemate propositionis illius, altera lineæ *MT* proportionalis. Et luna vi priore in terram, posteriore in solem secundum lineam rectæ *ST* à terrâ ad solem ductæ parallelam trahitur. Vis prior



L M agit secundum planum orbis lunaris, & propterea situm plani nil mutat. Hæc igitur negligenda est. Vis posterior *MT* quâ planum orbis lunaris perturbatur eadem ([e]) est cum vi 3 *P K* vel 3 *IT*. Et ([f]) hæc vis (per prop. xxv.) est ad vim

114. (e) * *Eadem est cum vi 3 PK* (Prop. XXV. not. u).

(f) * *Et hæc vis est ad vim quâ Luna in circulo circa terram quiescentem tempore suo periodico uniformiter revolvi posset.* Vis T.M T est ad vim M L ut est 3 P K sive 3 I T ad Radium, (Prop. XXVI. not. x); vis M L est ad vim quâ Luna circa terram tempore suo Periodico revolvi posset ut 1 ad 178,725 (Prop. XXV. not. r). Ergo, ex æquo, & conjunctis rationibus, est vis M T ad vim quâ Luna circa terram tempore suo Periodico revolvi posset ut est 3 I T ad Radium circuli multiplicatum per 178,725.

LIBER TERTIUS. PROP. XXX. PROBL. XI.

quâ lunâ in circulo circa terram quiescentem tempore suo periodico uniformiter revolvi posset, ut 3 *IT* ad radium circuli multiplicatum per numerum 178,725, sive ut *IT* ad radium multiplicatum per 59,575. Cæterum in hoc calculo, & eo omni qui sequitur, considero lineas omnes à lunâ ad solem ductas tanquam parallelas lineæ quæ à terrâ ad solem ducitur, (g) propterea quod inclinatio tantùm ferè minuit effectus omnes in aliquibus casibus, quantùm auget in aliis; & nodorum motus mediocres quærimus, neglectis istiusmodi minutiis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

Designet

(g) * *Propterea quod Inclinatio tantùm ferè minuit effectus omnes in aliquibus casibus quantùm auget in aliis.* Exempli gratiâ, sint nodi in quadraturis, spectetur-que Luna in punctis P & R æqualiter à quadraturis N & n distantibus & vis obliqua Solis SP, SR in ipsam agere concipiatur, quæ in duas dividatur, unam Parallelam lineæ ST, secundum directiones PY, RX agentem, alteram huic perpendicularem secundum directiones PI, RI; de effectu vis secundum directiones PY, RX agentis in hoc Problemate actum est; directiones verò PI, RI sese mutuo compensant; dividatur enim rursus vis PI, RI in duas vires unam Pi, Ri secundum planum orbitæ Lunaris agentem ideoque nodorum positionem non turbantem, alteram Pp, Rr ipsi perpendicularem; hæc 114
nodorum positionem, planique inclinationem afficiet, sed cum de plani inclinatione hic non agatur, manere plani inclinationem fingatur, itaque vis Pp, Rr dum admovet puncta P & R ad Eclipticam efficit ut nodis viciniores videantur seu ut nodi versus puncta illa moveri censeantur, ideoque actio in punctum P efficit ut nodus N in consequentia feratur & actio in punctum R efficit ut nodus n in antecedentia fertur, ideoque, Solis actio obliqua in punctum P motum retrogressivum nodi natum ex vi PY parallela lineæ ST tantùm minuit quantùm eadem actio obliqua in punctum R auget eum motum retrogressivum natum ex vi RX.

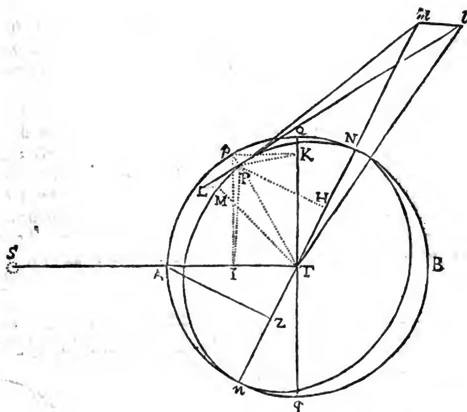
De Mundi Systemate.

Designet jam *PM* arcum, quem luna dato tempore quam minimo describit, & *ML* lineolam cujus dimidium luna, impellente vi præfatâ 3 *IT*, eodem tempore describere posset. (h) Jungantur *PL*, *MP*, & producantur eæ ad *m* & *l*, ubi secent planum eclipticæ; inque *Tm* demittatur perpendiculum *PH*. Et quoniam recta *ML* parallela est plano eclipticæ, ideoque cum rectâ *ml* quæ in plano illo jacet concurrere non potest, & tamen jacent hæ rectæ in plano communi *LMPml*; parallelæ erunt hæ rectæ, & propterea similia erunt triangula *LMP*, *lmP*. Jam cum *MPm* sit in plano orbis, in quo luna in loco *P* movebatur, incidet punctum *m* in lineam *Nn* per orbis illius nodos *N*, *n* ductam. Et quoniam vis quâ dimidium lineolæ *LM* generatur, si tota simul & semel in loco *P* impressa esset, generaret lineam illam totam; & efficeret ut luna moveretur in arcu, cujus chorda esset *LP*, atque ideo transferret lunam de plano *MPmT* in planum *LPlT*; motus angularis nodorum à vi illâ genitus, æqualis erit angulo *mTl*. Est

114. (h) * *Et ML lineolam cujus dimidium Luna, impellente vi 3 IT* describeret tempore quo Luna arcum PM percurreret; Assumit utique Newtonus ut rei conceptus facilior fiat, actiones omnes vis 3 IT quæ exercitæ fuerunt dum arcus PM percurritur *simul & semel in loco P impressas esse*, sicque motum Lunæ ex P motæ, esse compositum ex velocitate acquisitâ secundum Tangentem, & ex velocitate ultimo genitâ per actionem vis 3 IT agentem tempore æquali illi quo describitur arcus PM, ita ut Lunâ sequatur Diagonalem Parallelogrammi cujus unum latus sit PM alterum vero Parallelum & æquale lineæ LM; cum autem vis 3 IT exiguo temporis intervallo sensibiliter non mutetur, toto tempore quo describeretur lineola PM ea vis pro uniformi adsumi potest, hinc via quæ describitur per velocitatem uniformiter crescentem ab eâ vi 3 IT genitam est dimidia ejus viæ quæ describeretur per ultimam velocitatem in fine temporis PM genitam, & uniformem manentem toto tempore PM, quod eâdem ratione probari potest ac probatum fuit de gravitatis actione n. 30. Lib. I.

Quod si quis objiciat hinc fieri ut punctum L male repræsentet locum Lunæ, & locum ejus veriorem fore in medio inter M & L, respondemus solutionem hujus Problematis ex eâ positione Lunæ neutiquam pendere, hæc enim solutio duabus constat partibus, priori statuitur ratio motus nodorum in quibusvis punctis P orbitæ Lunaris, & hæc ratio eadem est sive ubique sumatur tota ML aut ubique ejus dimidium, dimidia enim sunt totis proportionalia; In secunda solutionis parte determinatur quantitas motus nodorum in syzygiis ipsis, respectu motus Lunæ in suâ orbita, & in hâc determinatione nihil deducitur ex magnitudine lineæ LM, sed tota hæc solutionis pars pendet ex proportione ipsius vis 3 IT ad vim centripetam Lunæ, unde nullus error metuendus est in hoc calculo ex hâc falsâ suppositione Lunam in puncto L versari cum in medio inter L & M collocanda fuisset.

Est autem ml ad mP ut ML ad MP, ideoque cum MP ob datum tempus data sit, est ml ut rectangulum $ML \times mP$, id est, (i) ut rectangulum $IT \times mP$. Et angulus mTl, si (k) mo- LIBER TERTIUS, PROP. XXX. PROBL. XI.



do angulus TMl rectus sit, est ut $\frac{ml}{Tm}$, & propterea ut $\frac{IT \times Pm}{Tm}$, id est (ob proportionales Tm & mP, TP & PH) ut $\frac{IT \times PH}{TP}$, ideo-

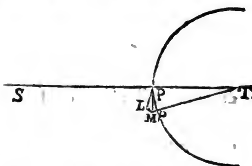
(i) * *Ut Rectangulum* $IT \times mP$. Linea ML est duplum viæ quæ dato tempore per actionem 3 IT percurritur, vis illa 3 IT dato illo tempore uniformis manere censetur, itaque in diversis punctis P, viæ eodem dato tempore per actiones 3 IT percursæ sunt ut illæ vires 3 IT, sive ut IT, ergo ML ejus viæ duplum est etiam ut IT, & $ML \times mP$ est ut $IT \times mP$. 114

(k) * *Si modo angulus Tml sit rectus* cum angulus mTl sit admodum exiguus, si angulus Tml sit rectus, usurpari poterit recta ml pro arcu circuli cujus radius est Tm ideoque (154. lib. 1.) angulus mTl est ut $\frac{ml}{Tm}$.

que ob datam TP, ut $IT \times PH$. Quod si angulus Tml, seu STN obliquus sit, [l] erit angulus mTl adhuc minor, in ratione sinus anguli STN ad radium, seu AZ ad AT. Est igitur velocitas nodorum ut $IT \times PH \times AZ$, sive ut contentum sub sinubus trium angulorum TPI, PTN & STN.

Si anguli illi, nodis in quadraturis & luna in syzygiâ existentibus, recti sint, lineola ml abibit in infinitum, & angulus mTl evadet angulo mPl æqualis. Hoc autem in casu, angulus mPl est ad angulum PTM, quem luna eodem tempore motu suo apparente circa terram describit, ut 1 ad 59,575. Nam angulus mPl æqualis est angulo LPM, id est, angulo deflexionis lunæ à recto tramite, quem sola vis præfata solaris $3\,IT$, si tum cessaret lunæ gravitas, dato illo tempore generare posset; [m] & angulus PTM æqualis est angulo deflexionis lunæ à recto tramite, quem vis illa, quâ luna in orbe suo retinetur, si tum cessaret vis solaris $3\,IT$, eodem tempore generaret. Et hæ vires, ut supra diximus, sunt ad invicem ut 1 ad 59,575. Ergo

114. (l) * *Erit angulus* m T l, *in ratione sinus anguli* STN *ad radium* in Triangulo T *m l*, est sinus anguli *m* T *l* ad sinum Anguli T *m l* ut latus *m l* ad latus T *l*; Sed propter exiguitatem lateris *m l* respectu lateris T *l*, ratio *m l* ad T *l* eadem semper manere censetur qualiscumque sit angulus T *m l*, manentibus lineis *m l* & T *m*; in angulo enim maximo linea T *l* evadit T *m* + *m l*, in minimo T *m* − *m l*, est verò *m l* quantitas evanescens respectu T *m*, hinc illius incrementi aut decrementi *m l* ratio nulla est habenda; Itaque manente quantitate *m l* qualiscumque sit angulus T *m l*, ratio *m l* ad T *l* eadem est, itaque etiam manet ratio sinus anguli *m* T *l* ad sinum anguli T *m l*, sive etiam, cum anguli minimi, sint ut eorum sinus, anguli *m* T *l* in variâ inclinatione lineæ datæ *m l* ad lineam datam T *m* sunt inter se ut sinus Angulorum T *m l*, est ergo angulus *m* T *l*, in quâvis magnitudine anguli T *m l* ad eum angulum *m* T *l* quando angulus T *m l* est rectus ut sinus anguli T *m l* (vel, ut sinus anguli I T n ipsi æqualis, ob parallelas S T, *m l*) ad sinum anguli recti, hoc est ut sinus anguli S T N qui idem est cum sinu anguli S T n ad Radium. Q. E. O.



(m) * *Et angulus* PTM *æqualis est angulo deflexionis.* Angulus M P p est angulus deflexionis de quo nunc agitur Triangula verò M P p, M P T sunt similia ob angulum communem P M T, & angulos rectos T P M & P p M, hinc anguli residui P T M, M P p sunt æquales.

(n) Ergo cum motus medius horarius lunæ respectu fixarum sit $32'. 56''. 27'''. 12^{iv}\frac{1}{2}$, motus horarius nodi in hoc casu erit $33''. 10'''. 33^{iv}. 12^{v}$. Aliis autem in casibus motus iste horarius erit ad $33''. 10'''. 33^{iv}. 12^{v}$. ut contentum sub sinubus angulorum trium *TPI*, *PTN*, & *STN* (seu distantiarum lunæ à quadraturâ, lunæ à nodo, & nodi à sole) ad cubum radii.

(n) * *Ergo* &c. Isti anguli deflexionis debent esse ut vires illas deflexiones producentes, in hoc enim casu, utrâque vis agit perpendiculariter ad Tangentem PM hinc lineolæ Mp, ML per eas vires genitæ tempore eodem, eo nempe quo percurretur Tangentis portio PM, debent esse ut ipsæ illæ vires; eæ verò lineolæ sumpto PM pro radio sunt Tangentes angulorum deflexionis pPM, MPL, & anguli quam minimi sunt ut ipsorum Tangentes, ergo anguli illi deflexionis sunt ut vires illas producentes, motus autem horarii lunæ & nodorum sunt ipsi anguli PTM & mTl, qui sunt ex demonstratis æquales angulis deflexionum MPp, MPL, ergo motus horarii sunt ut vires illas deflexiones producentes. Q. E. O. 114.

DE MUNDI SYSTEMATE. (o) Et quoties signum anguli alicujus de affirmativo in negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debebit motus regressivus in progressivum & progressivus in regressivum mutari. Unde fit ut nodi progrediantur quoties luna inter quadraturam alterutram & nodum quadraturæ proximum versatur. Aliis in casibus regrediuntur, & per excessum regressus supra progressum singulis mensibus feruntur in antecedentia.

Co-

114. (o) * *Et quoties signum alicujus Anguli de affirmativo* &c. Angulos QTP & NTP, positivos vocat Newtonus, quando punctum P est in consequentia respectu punctorum Q vel N ad quæ referuntur, hoc est Angulus QTP est positivus quoties arcus QP, ab ultimâ quadraturâ Q numeratus in consequentia non excedit 180gr. negativus verò cum arcus QP excedit 180gr.; angulus NTP pariter est positivus cum arcus NP à nodo ascendente in consequentia numeratus non excedit 180gr. negativus verò est cum is arcus NP excedit 180gr. Quando enim arcus QP, NP excedunt 180gr. tunc anguli QTP, NTP non amplius numerantur secundum Lunæ directionem, seu secundum viam quam Luna est emensa, sed secundum viam quæ ipsi describenda superest ut ad puncta Q & N redeat, hinc illi anguli negativi dicuntur, eorum respectu qui secundum viam à Lunâ descriptam mensurantur.

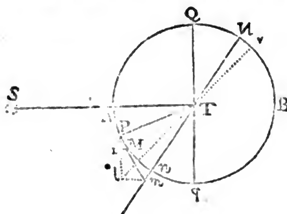
Angulus verò STN positivus dicitur quando arcus AN à loco conjunctionis Lunæ cum Sole usque ad nodum contra ordinem signorum numeratus, est minor 180gr., negativus verò dicitur cum excedit 180gr., quia, cum nodi moveantur contra ordinem signorum sive in antecedentia, angulus STN primo casu exprimit viam nodi à syzygia, secundo casu viam quam emetiri debet ut ad syzygiam redeat.

Probandum autem 1°. quod si tres illi Anguli QTP, NTP, STN sint positivi motus nodorum est regressivus: 2°. Quod si unus eorum sit negativus reliqui positivi motus nodorum est progressivus. 3°. Quod si unus eorum sit positivus duo negativi, motus nodorum est regressivus. 4°. Denique quod si omnes sint negativi motus nodorum iterum fit progressivus, sic enim *quoties signum alicujus anguli de affirmativo in negativum deque affirmativo in negativum mutatur debebit motus regressivus in progressivum & progressivus in regressivum mutari.*

Art. 1. Si tres Anguli sint Positivi nodorum motus erit regressivus.

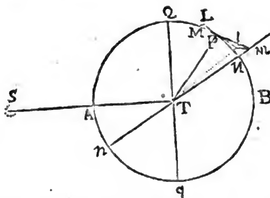
In hoc casu, Arcus AN contra ordinem signorum sumptus non excedit semicirculum ideoque punctum N erit in semicirculo AQB; Præterea arcus QP secundum ordinem signorum sumptus, 180gr. non excedit, erit itaque punctum P in semicirculo QAq; Denique arcus NP semicirculo major esse non debet, sed potest vel quadrante minor vel quadrante major, sit NP quadrante minor ut in figurâ Textus, in quâ reliquæ hujus casus conditiones occurrunt, ex ipsâ hujusce propositionis constructione liquet quod ductâ ML quæ exprimit actionem Solis, productâ MP quæ lineæ nodorum occurrit in m, productâ LP quæ occurrit plano Eclipticæ in l, ita ut ml sit parallela lineæ ML, cum L sit versus Solem respectu puncti M & lineæ MPm, LPl sese decussent punctum l erit remotius à Sole quam punctum m, ideoque angulus ATl major erit quam angulus ATm ergo nodus promotus est contra ordinem signorum, hoc est ejus motus est regressivus.

Si



Sit NP quadrante major, tum lineæ PM, PL non amplius erunt retroproducendæ ut cum lineâ TN concurrant, sed antrorsum productæ concurrent cum ejus productione Tn, & quoniam sese non decussant, manebit punctum l propius Soli quam punctum m, & angulus ATl minor erit angulo ATm, ideoque productâ lineâ lT in V, angulus ATV complementum ad duos rectos anguli ATl, major erit angulo ATN complemento ad duos rectos anguli ATm, ergo nodus N promotus est contra ordinem signorum ut prius; Ergo ubicumque sit punctum P si tres anguli QTP, NTP, STN sint positivi motus nodi est regressivus. 114.

Art. 2. Mutetur horum Angulorum quivis ex positivo in negativum manentibus positivis angulis duobus reliquis motus nodorum ex regressivo progressivus fiet.



Caf. 1. Fiat angulus QTP negativus, hoc est, punctum P sit in semicirculo QBq, manente positivo angulo STN ita ut N sit in semicirculo AQB, & pariter manente positivo angulo NTP; observandum quod lineolâ ML in semicirculo QBq positionem habet oppositam illi quam habebat in semicirculo QAq ut constat ex Prop. LXVI. lib. 1. ita ut punctum L sit à Sole remotius quam punctum M; Itaque si PN sit minor quadrante, lineæ LP retroproducendæ erunt, & punctum l erit propius Soli quam punctum m; ideoque angulus ATl minor erit angulo ATm, ergo (cum diminuatur angulus ATN qui sumitur contra ordinem signorum) nodus secundum ordinem signorum est promotus ejusque motus progressivus est.

114. Si verò NP sit major quadrante antrorsum productis lineis PM, PL punctum l manebit remotius à Sole quam punctum m, ideoque angulus ATl major erit angulo ATm, producta itaque lT in V, angulus lTV anguli ATl complementum minor erit angulo ATN, nodus ergo ab N versus A in consequentia processerit itaque motus nodi est ut prius progressivus.

Cas. 2. Sit angulus NTP negativus; hoc est sit punctum N in consequentia respectu puncti P, sit vero QTP positivus hoc est sit punctum P in semicirculo QAq & pariter sit STN positivus ita ut N sit in semicirculo AQB, si NP (secundum consequentia) sit minor tribus quadrantibus, P distabit à puncto n minus quadrante, ideoque retroproductis lineis MP, LP in m & l, cum L sit soli propius quam M, erit l à sole remotius quam m, ideoque angulus ATl major erit angulo ATn, & angulus ATV prioris complementum minor erit angulo ATN qui est anguli ATm complementum; processit ergo nodus ab N versus A, motus ergo nodi est progressivus.

Si NP sit major tribus quadrantibus, P minus quadrante à puncto N distabit, cumque N sit in consequentia respectu puncti P ut & puncta M & L antrorsum producendæ sunt lineæ PM, PL ut plano Eclipticæ occurrant in m & l, & cum L sit Soli vicinius quam M pariter l erit Soli vicinius quam m, hinc angulus ATl minor erit angulo ATN, nodus ergo ab N versus A processit & motus nodi est progressivus.

Cas. 3. Sit angulus STN negativus positivis existentibus angulis QTP, NTP. Sit NP minor quadrante, retroproducendæ sunt lineæ PM, PL ideoque l erit remotior à Sole, quam m, & angu-

lus A T I major erit quam A T m; vel A T N, cum ergo N sit in consequentia respectu puncti A, quia angulus S T N est negativus, punctum I magis adhuc in consequentia processerit, motus ergo nodi erit progressivus. Sit NP major quadrante, antrorsum producendæ erunt lineæ P M, P L ut cum Ecliptica concurrant, à parte nodi n ideoque L erit propius Soli quam m, & angulus A T I minor erit angulo A T n; ideoque angulus A T V major erit quam A T N, ergo processit nodus ex N in V, secundum consequentia.

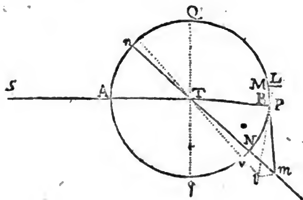
Art. 3. Sint duo ex tribus Angulis Q T P, N T P, S T N negativi, tertius positivus, motus nodorum ex progressivo regressivus fiet.

114.

Casus 1us. Sint Q T P & N T P negativi, solus S T N sit positivus, distet P à nodo N minus tribus quadrantibus, sive minus quadrante à puncto n, idque in consequentia, retro producendæ erunt lineæ P M, P L, ut P M lineæ nodorum occurrat in m, & L P in l vicinius Soli, hinc A T l minor erit A T m & ideo A T V major quam A T N sed punctum N est in antecedentia respectu puncti A, ergo V est in antecedentia respectu puncti N, ergo nodus regreditur; Distet P ab N plus tribus quadrantibus, antrorsum producendæ sunt lineæ P M, P L ut occurrant lineæ nodorum & l manebit à Sole remotius quam m & angulus A T l major erit angulo A T N regreditur ergo Nodus.

Cas. 2. Sint Q T P & S T N negativi, solus vero N T P positivus, sit N P minor quadrante, retroproductis lineis, cum L sit remotius à Sole quam M, erit l ob decussationem linearum propius Soli & angulus A T l sive A T V minor angulo A T N, sed quia hic angulus est negativus, complementa ad quatuor rectos erunt sumenda, & arcus A Q P V major erit arcu A Q P N ergo nodus regreditur.

De Mundi Systemate.



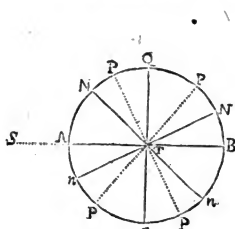
814. Sit N P major quadrante, lineis P M, P L productis occurrent Eclipticæ à parte puncti n, & propter angulum Q T P negativum cum P sit in semicirculo q B Q erit l ut & L remotius à Sole quam m & M, ideo angulus A T n minor est angulo A T l & complementum prioris anguli A T N major est angulo A T V, sed A est in antecedentia respectu puncti N, ergo etiam V est in antecedentia respectu puncti N regreditur ergo nodus.

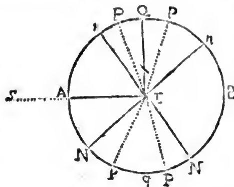
Cas. 3. Sint S T N & N T P negativi, Q T P vero positivus, punctum L est ubivis propius Soli quam M, si P minus tribus quadrantibus distet ab N retro producendæ sunt lineæ P M, P L, à parte puncti n & erit A T l majus quam A T n, sed quia S T N est negativus, n est in semicirculo superiori A Q B, & n est in antecedentia respectu A, ideoque l est in antecedentia respectu n, ut etiam V respectu N, regreditur ergo nodus; sit N P tribus quadrantibus major, lineæ P M, P L antrorsum sunt producendæ, l erit propius soli quam m & A T l sive A T V minor quam A T N, sed quia A T N est negativus, ideoque A est in Antecedentia respectu puncti N erit etiam V in Antecedentia respectu puncti N, regreditur ergo nodus.

Art. 4. Si tres anguli Q T P, N T P, S T N sint negativi motus ex regressivo progressivus fiet; ut Hypothesis hujus articuli obtineat, oportet ut nodus N & Luna P sit in quadrante q B; nam cum angulus Q T P sit negativus, P debet esse in semicirculo q B Q; cum S T N sit negativus, N debet esse in semicirculo A q B, & cum N T P sit negativus N debet esse in consequentia respectu P; ergo, N non potest versari in quadrante A q, nec P in quadrante B Q: Antrorsum ergo erunt producendæ lineæ P M, P L ut Eclipticæ occurrant, erit l remotius à Sole quam m, & angulus A T V major angulo A T N, sed hic angulus est negativus, sive est N in consequentia respectu A, erit ergo etiam V in consequentia respectu puncti N, nodus itaque progreditur.

His positis dico, quod motus nodi progressivus evadit dum Luna versatur inter alterutrum nodum & quadraturam ipsi proximam; quadraturam nodo proximam vocat Newtonus, si quadraturæ à nodo distantia quadrante major non sit.

Sit





Sit enim angulus A T N positivus, quoniam Luna sive punctum P est inter puncta Q & N vel q & n ex Hypothesi, alteruter ex angulis Q T P, N T P erit positivus alter negativus; nam sit N vel n in semicirculo Q B q, tum quia P est inter Q vel q & N vel n, erit P in eodem semicirculo Q B q, ideoque angulus QTP erit negativus, sed angulus NTP erit positivus, nam quia P est inter N & Q aut q & n, & Q est in consequentia respectu N, erit etiam P in consequentia respectu puncti N, & pariter dum n versatur in semicirculo Q B q, n est in consequentia respectu puncti q & arcus N q in consequentia sumptus nec non arcus NP finguli minores erunt arcu N n sive minores semicirculo, ergo utroque casu angulus NTP erit positivus.

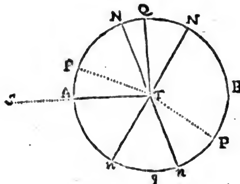
Manente A T N positivo sint N vel n in semicirculo Q A q, tum quia P est inter Q & N aut n & q, erit etiam P in semicirculo Q A q, ideoque angulus QTP erit positivus, sed angulus N T P erit negativus, nam quia Q est in antecedentia respectu puncti N, P inter Q & N positum erit in antecedentia respectu N; & in casu quo P foret inter n & q quia q est in hac Hypothesi in consequentia respectu n, P foret etiam in consequentia respectu n, ideoque plus semicirculo à puncto N distaret utroque ergo casu angulus NTP negativus foret.

Sit angulus A T N negativus, sitque N in quadrante q A, vel n in quadrante A Q, & Luna P inter N & q vel n & Q, liquet angulum Q T P fore positivum, quia est P in semicirculo Q A q; angulus autem N T P erit etiam positivus, nam sit N in quadrante q A, q est in consequentia respectu N, ergo P quod est inter N & q est etiam in consequentia respectu N; sit n in quadrante A Q, cum n sit in consequentia respectu Q, erit etiam in consequentia respectu P, hinc arcus N P in consequentia minor erit semi-circulo, utroque ergo casu angulus NTP est positivus. = 114.

Itaque si angulus ATN sive STN sit positivus, ubivis sit N in semicirculo AQB & si angulus S T N sit negativus sed ita ut sit N in quadrante q A, quando Luna erit posita inter Nodum utrumvis N vel n, & quadraturam proximam unus è tribus angulis duntaxat erit negativus duo reliqui erunt positivi, itaque per articulum 2um. motus nodi progressivus erit.

Existente verò angulo S T N negativo, & N in quadrante q B vel n in quadrante B Q Luna verò posita inter utrumvis nodum & quadraturam proximam reliqui duo anguli Q T P, N T P negativi erunt; liquet enim facile punctum P in hac hypothesi versari in semicirculo q B Q ideoque angulum Q T P esse negativum, præterea quia q est in antecedentia respectu N ex hypothesi, P est etiam in antecedentia respectu N, & quia Q est in consequentia respectu n, erit etiam P in consequentia respectu n, ideoque punctum N plus semicirculo à puncto P distabit, itaque sive sit P inter q & N sive inter n & Q in semicirculo q B Q tres anguli erunt negativi, sed per Arti-

De Mundi Systemate.



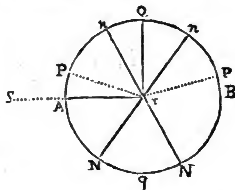
114. Art. 4. eo casu motus nodi est progressivus; Ergo in omni casu, si Luna sit inter nodum & quadraturam proximam nodi progrediuntur.

In omnibus aliis casibus motus nodi est regressivus; Nam quando omnes anguli sunt positivi, vel quando duo anguli sunt negativi & tertius positivus motus nodi regressivus est per Art. 1. & 3., alterutrum autem evenire necesse est cum P non est inter nodum & quadraturam proximam; Hoc enim posito, sit ut prius angulus STN positivus & N in quadrante QTA, & P ubivis inter N & remotiorem quadraturam q, vel inter n & remotiorem quadraturam Q; si P sit inter N & q angulus QTP est positivus siquidem P est in semicirculo QAq, & quia N est nunc inter P & Q, & N est in consequentia respectu Q, erit P in consequentia respectu N ergo angulus NTP est positivus; si P sit inter n & Q angulus QTP est negativus, sed & pariter angulus NTP, nam cum P sit in consequentia respectu n plus semicirculo à puncto N distabit.

Sit N ubivis in quadrante BTQ, & P inter Q & n vel inter q & N primo casu omnes angulos fore positivos, altero angulos QTP & NTP fore negativos ut in præcedenti demonstrabitur.

Denique angulus STN sit negativus, & P non sit inter quadraturam & nodum sed alibi ubivis, alteruter ex angulis QTP, NTP positivus erit negativus alter; sit N in quadrante ATq & P in arcu QAN (quadrante major) erit QTP positivus & NTP negativus, siquidem P est in antecedentia respectu N, sit P in arcu qBn erit QTP negativus, sed NTP positivus nam arcus NP in consequentia sumptus semicirculo minor erit.

Sit N in quadrante qTB, si P sit in arcu nq, angulus QTP positivus est sed angulus NTP negativus quia arcus Nn+nP semicirculo major est, si P sit in arcu NQ angulus QTP est quidem negativus, sed quia P est in consequentia respectu N minusque semicirculo distat, ergo angulus NTP est positivus; Hinc ubivis sit P si modo non sit inter nodum & quadraturam proximam, vel omnes anguli

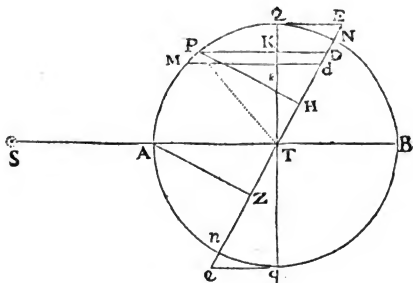


erunt Positivi, vel duo simul negativi alter verò positivus.

Cum ergo arcus inter N vel n & quadraturam proximam, numquam excedat quadrantem, eoque sit sæpe minor; è contra verò, arcus inter N vel n & quadratu-

Corol. 1. Hinc ſi à dati arcus quam minimi *PM* terminis *P* & *M* ad lineam quadraturas jungentem *Qq* demittantur perpendicula *PK*, *Mk*, eademque producantur donec ſecent lineam nodorum *Nn* in *D* & *d*; erit motus horarius nodorum

LIBER TERTIUS. PROP. XXX. PROBL. XI.



ut area *MPDd* & quadratum lineæ *AZ* conjunctim. Sunto enim *PK*, *PH* & *AZ* prædicti tres ſinus. Nempe *PK* ſinus diſtantiæ lunæ à quadraturâ, *PH* ſinus diſtantiæ lunæ à nodo, & *AZ* ſinus diſtantiæ nodi à ſole: & erit velocitas nodi ut con-

dráturam remotiorem numquam ſit minor quadrante & ſæpe eo major, majori parte revolutionis Lunæ, Nodi regrediuntur & per exceſſum regreſſus ſupra progreſſum, ſingulis menſibus nodi feruntur in Antecedentia.

Potuiſſent Articuli 4. ſupra demonſtrati, ex ſolâ vi ſignorum Algebricorum deduci, eamque demonſtrationis ſpeciem adhibere videtur Newtonus; at a icui negotium faceſſere potuiſſent horum ſignorum mutationes in angulis ſpectatæ, in quibus cum angulus ad ſemicirculum creſcit & maximus fit, mox negativus evadit, quod ſane non eveniſſet ſi viæ deſcriptæ, non verò anguli conſiderati fuiſſent; 114 Juvant Algebricæ illæ conſequentiæ, in retegendis promptè Propoſitionibus iiſque ad generaliſſimas expreſſiones revocandis, ſed in nonnullis quæſtionibus ad certitudinem plenam idearumque claritatem requiritur ut, per caſuum enumerationem, illæ Algebricæ conſequentiæ, velut ad lapidem Lydium explorentur. Cæterum, quamvis figuras unicuique caſui proprias non delineaverimus, facile erit ex iis quæ ſculptæ ſunt, figuras deficientes imaginari aut deſcribere.

DE MUNDI SYSTEMATE.

contentum $PK \times PH \times AZ$. Est (p) autem PT ad PK ut PM ad Kk, ideoque ob datas PT & PM est Kk ipsi PK proportionalis. Est & AT ad PD ut AZ ad PH, & propterea PH rectangulo $PD \times AZ$ proportionalis, & conjunctis rationibus $PK \times PH$ est ut contentum $Kk \times PD \times AZ$, & $PK \times PH \times AZ$ ut $Kk \times PD \times AZ$ *qu.* id est, ut area $PDdM$ & AZ *qu.* conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 2. In datâ quâvis nodorum positione, motus horarius mediocris est semissis motus horarii in syzygiis lunæ, ideoque est ad $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. ut quadratum sinus distantiæ nodorum à syzygiis ad quadratum radii, sive ut AZ *qu.* ad AT *qu.* Nam si luna uniformi cum motu perambulet semicirculum QAq, summa omnium arearum $PDdM$, quo tempore luna pergit à Q ad M, erit area $QMdE$ quæ ad circuli tangentem QE terminatur; & quo tempore luna attingit punctum n, summa illa erit area tota $EQAn$ quam linea PD describit, dein lunâ pergente ab n ad q, linea PD cadet extra circulum, & aream nqe ad circuli tangentem qe terminatam describet; quæ, quoniam nodi prius regrediebantur, jam vero progrediuntur, subduci debet de areâ priore, & cum æqualis sit areæ QEN, relinquet semicirculum $NQAn$. Igitur summa omnium arearum $PDdM$, quo tempore luna semicirculum describit, est area semicirculi; & summa omnium quo tempore luna circulum describit est area circuli totius. At area $PDdM$, ubi luna versatur in syzygiis, est rectangulum sub arcu PM & radio PT; & summa omnium huic æqualium arearum, quo tempore luna circulum describit, est rectangulum sub circumferentiâ totâ & radio circuli; & hoc rectangulum, cum sit æquale duobus circulis, duplo majus est quam rectangulum prius. Proinde nodi, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ quam habent in syzygiis lunaribus, spatium duplo majus describerent quam reverâ describunt; & propterea motus mediocris quocum, si

214: (p) * *Est autem PT ad PK ut PM ad Kk* ex notissimâ circuli proprietate Radium esse ad ordinatam ut est fluxio arcus ad fluxionem abscissæ.

ſi uniformiter continuaretur, ſpatium à ſe inæquabili cum mo- LIBER TERTIUS.
tu reverâ confectum deſcribere poſſent, eſt ſemiſſis motus quem PROP. XXX.
habent in ſyzygiis lunæ. Unde cum motus horarius maximus, PROBL. XI.
ſi nodi in quadraturis verſantur, ſit $33'. 10'''. 33^{iv}. 12^{v}$, motus mediocris horarius in hoc caſu erit $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. Et (q) cum motus horarius nodorum ſemper ſit ut *AZ qu.* & area *PDdM* conjunctim, & propterea motus horarius nodorum in ſyzygiis lunæ ut *AZ qu.* & area *PDdM* conjunctim, id eſt (ob datam aream *PDdM* in ſyzygiis deſcriptam) ut *AZ qu.* atque ideo hic motus, ubi nodi extra quadraturas verſantur, erit ad $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. ut *AZ qu.* ad *AT qu.* *Q. E. D.*

(q) * *Et cum motus horarius nodorum ſit &c.* per Corollarium præcedentem.

DE MUNDI SYSTEMATE.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XII.

Invenire motum horarium nodorum lunæ in orbe elliptico (r).

Designet $Qpmaq$ ellipsin, axe majore Qq, minore ab descriptam, $QAqB$ circulum circumscriptum, T terram in utriusque centro communi, S solem, p lunam in ellipsi motam, & pm

124. (r) * *In orbe Elliptico* illo nempe orbe in quem figura circularis orbitæ Lunaris mutatur per actionem Solis, quique axem habet majorem ad axem minorem in ratione 70. ad 69. per Prop. XXVIII. hujusce.

pm arcum quem datâ temporis particulâ quam minimâ deſcri- LIBER TERTIUS.
bit, N & n nodos linea Nn junctos, pK & mk perpendicula in PROP.
axem Qq demiſſa & hinc inde producta, donec occurrant cir- XXXI.
culo in P & M, & lineæ nodorum in D & d. (f) Et ſi lu- PROBL. XII.
na, radio ad terram ducto, aream deſcribat tempori proportionalem, erit motus horarius nodi in ellipſi ut area $pDdm$ & AZq conjunctim.

Nam ſi PF tangat circulum in P, & producta occurrat TN in F & pf tangat ellipſin in p & producta occurrat eidem TN in f, (t) conveniant autem hæ tangentes in axe TQ ad Y; & ſi ML deſignet ſpatium quod luna in circulo revolvens, interea dum deſcribit arcum PM, urgente & impellente vi prædictâ $3IT$, ſeu $3PK$ motu tranſverſo deſcribere poſſet, & ml deſignet ſpatium quod luna in ellipſi revolvens eodem tempore, urgente etiam vi $3IT$ ſeu $3pK$, deſcribere poſſet; & producantur LP & lp donec occurrant plano eclipticæ in G & g; & jungantur FG & fg, quarum FG producta ſecet pf,

(f) * *Et ſi Luna radio ad terram ducto deſcribat aream tempori proportionalem* &c. Liquet ex Propoſ. XXVIII. Lunam hanc Ellipſim de quâ agitur ita non deſcribere ut areæ ſint temporibus proportionales, ſed hæc Hypotheſis ad ſolutionem hujus Problematis erat neceſſaria, ut ſcilicet Luna poſſit fingi verſari in puncto p ordinatæ P K eodem tempore quo ſi circulum deſcriberet in ejus extremitate P verſata eſſet, quod tunc tantùm obtineret ſi hæc Ellipſis ita deſcribatur ut areæ ſint proportionales temporibus; Notum enim eſt areas Ellipticas T p Q proportionales fore areis T P Q, areas T P Q proportionales eſſe arcubus P Q, arcus verò P Q proportionales temporibus, ſi quidem Luna citra Solis actionem in circulo lata, uniformiter moveretur.

Verum hæc falſa Hypotheſis corrigitur in eâ ſolutionis hujus Problematis parte quæ poſt Corollarium adjicitur.

(t) * *Conveniant autem hæ Tangentes in axe T Q ad Y.* Liquet ex not. 257. Lib. I. Quod ſi duæ curvæ communem axem habentes, ſint tales ut ipſarum ordinatæ datam inter ſe rationem ſervent, & in ſummo ordinatarum correſpondentium ducantur Tangentes, illæ Tangentes in eodem axeos puncto concurrunt; Nam cum ordinatæ datam rationem ſervent (ex Hypoth.) oportet ut ipſarum fluxiones eamdem etiam ſervent rationem ita ut ratio fluxionis ordinatæ ad ordinatam ipſam, eadem ſit in utrâque curvâ. Eſt verò ſemper fluxio ordinatæ ad ordinatam ut fluxio abſciſſæ ad ſubtangentem, ergo in hâc Hypotheſi, ratio fluxionis abſciſſæ ad ſubtangentem eſt etiam eadem in utraque curva, ſed fluxio abſciſſæ ipſa eſt eadem pro utrâque curvâ, ergo etiam ſubtangens eadem eſt, hinc itaque Tangentes in extremitatibus ordinatarum correſpondentium ductæ in eodem puncto axem attingunt quando utriuſque curvæ ordinatæ ad eadem axeos puncta pertinentes, conſtantem rationem ſervant: Notum autem eſt, ex not. 247. Lib. I, Quod ſi circulus deſcribatur ſuper axim Ellipſeos, ordinatæ circuli & Ellipſeos erunt inter ſe in ratione datâ axeos communis circulo & Ellipſi ad alterum axem, ſive eſſe P K ad p K ut A T ad a T, hinc ergo Tangentes in punctis P & p ductæ axi occurrent in eodem puncto Y. 114

De Mundi Systemate.

pg & TQ in c, e & R respectivè, & fg producta secet TQ in r. Quoniam vis $3IT$ seu $3PK$ in circulo est ad vim $3IT$ seu $3pK$ in ellipsi, ut PK ad pK, seu AT ad aT; erit spatium ML vi priore genitum, ad spatium ml vi posteriore genitum, ut PK ad pK, id est, ob similes figuras $PYKp$ & $FYRc$, ut FR ad cR. Est autem ML ad FG (ob similia triangula PLM, PGF) ut PL ad PG, hoc est (ob parallelas Lk, PK, GL) ut pl ad pe, id est (ob similia triangula plm, cpe) ut lm ad ce; & inversè ut LM est ad lm, seu FR ad cR, ita est FG ad ce. Et propterea si fg esset ad ce ut fY ad cY, id est, ut fr ad cR (hoc est, ut fr ad FR

& FR ad cR conjunctim, id est, ut fT ad FT & FG ad ce conjunctim) quoniam ratio FG ad ce utrinque ablata relinquit rationes fg ad FG & fT ad FT, foret fg ad FG ut fT ad FT; atque ideo anguli, quos FG & fg subtenderent ad terram T, (u) æquarentur inter se. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente propositione exposuimus) sunt motus nodorum, quo tempore luna in circulo arcum PM, in ellipsi arcum pm percurrit: & propterea motus nodorum in circulo & ellipsi æquarentur inter se. Hæc ita se haberent, si modo fg esset ad ce ut fY ad cY, id est, si fg æqualis esset $\frac{ce \times fY}{cY}$. Verùm ob similia triangula fgp, cep, est fg ad ce ut fp ad cp; ideoque fg æqualis est $\frac{ce \times fp}{cp}$; & (x) propterea angulus, quem fg reverâ subtendit, est ad angulum priorem quem FG subtendit, hoc est, motus nodorum in ellipsi ad motum nodorum in circulo, ut hæc fg seu $\frac{ce \times fp}{cp}$ ad priorem fg seu $\frac{ce \times fY}{cY}$, id est, ut $fp \times cY$ ad $fY \times cp$, seu fp ad fY & cY ad cp, hoc est, si ph ipsi TN parallela occurrat FP in h, ut Fh ad FY & FY ad FP; hoc est, ut Fh ad FP seu Dp ad DP, (y) ideoque ut area $Dpmd$ ad aream $DPMd$. Et propterea, cum (per corol. 1. prop. XXX.) area posterior & AZq conjunctim proportionalia sint motui horario nodorum in circulo, erunt area prior & AZq conjunctim proportionalia motui horario nodorum in ellipsi. *Q. E. D.*

Co-

(u) * *Atque ideo anguli quos FG & fg subtenderent ad terram T æquarentur inter se*, nam cum lineæ F G & f g sint inter se Parallelæ & proportionales lineis T F, T f, recta T G producta transibit etiam per g, ideoque per eundem angulum videbuntur lineæ F G & f g ex terrâ T.

(x) * *Et propterea angulus quem fg reverâ subtendit est ad angulum priorem ut hæc fg ad priorem fg.* Cum enim linea fg sit minima, respectu lineæ T g linea T g eadem manere censenda est in utrâque magnitudine lineæ f g hic assumpta; sed in Triangulo utroque T f g. Sinus anguli f est ad lineam T g, ut sinus anguli f T g ad lineam f g; ergo cum maneat angulus f, & linea T g; ratio sinus anguli f T g ad lineam f g erit data, sive quia anguli minimi sunt ut sui sinus, erit angulus quem f g reverâ subtendit ad angulum quem ficta f g subtendebat, ut vera f g ad fictam f g. 114

(y) * *Ideoque ut area D p m d ad aream D P M d* nempe propter communem altitudinem K k, nam Trapezia p D d l, P D d L, pro Parallelogrammis assumi possunt quæ sunt ut Bases D p, D P, & altitudines K k conjunctim.

De Mundi Systemate.

Corol. Quare cum, in datâ nodorum positione, summa omnium arearum $pDdm$, quo tempore luna pergit à quadraturâ ad locum quemvis m, sit area $mpQEd$, quæ ad ellipseos tangentem QE terminatur; & summa omnium arearum illarum, in revolutione integrâ, sit area ellipseos totius: motus mediocris nodorum in ellipsi erit ad motum mediocrem nodorum in circulo, ut ellipsis ad circulum; id est, ut Ta ad TA, seu 69 ad 70. Et propterea, cum (per corol. 2. prop. xxx) motus mediocris horarius nodorum in circulo sit ad $16''. 53'''. 16^{iv}. 36^{v}$. ut AZ *qu.* ad AT *qu.* si capiatur angulus $16''. 21'''. 3^{iv}. 30^{v}$. ad angulum $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. ut 69 ad 70, erit motus mediocris horarius nodorum in ellipsi ad $16''. 21'''. 3^{iv}. 30^{v}$. ut APq ad ATq; hoc est, ut quadratum sinus distantiæ nodi à sole ad quadratum radii.

(z) Cæterum luna, radio ad terram ducto, aream velocius describit in syzygiis quam in quadraturis, & eo nomine tempus in syzygiis contrahitur, in quadraturis producitur; & unà cum tempore motus nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in quadraturis lunæ ad ejus momentum in syzygiis ut 10973 ad 11073, & propterea momentum mediocre in octantibus est ad excessum in syzygiis, defectumque in quadraturis, ut numerorum semisumma 11023 ad eorundem semidifferentiam 50. Unde cum tempus lunæ in singulis orbis particulis æqualibus sit reciprocè ut ipsius velocitas, erit tempus mediocre in octantibus ad excessum temporis in quadraturis, ac defectum in syzygiis, ab hâc causâ oriundum, ut 11023 ad 50 quam proximè. (a) Pergendo autem à quadraturis ad syzygias, invenio quod excessus momentorum areæ in locis singulis, supra momentum minimum in quadraturis, sit ut quadratum sinus distantiæ lunæ à quadraturis quam proximè; & propterea differentia inter momentum in loco quocunque

que

114. (z) * *Cæterum Luna*, &c. Hæc omnia ex Prop. 26: hujusce deducuntur.

(a) * *Pergendo autem à quadraturis.* Vide not. r Prop. 26. & locum ad quem refertur.

que & momentum mediocre in octantibus, est ut differentia inter quadratum sinus distantiæ lunæ à quadraturis & quadratum sinus graduum 45, seu semissem quadrati radii; & incrementum temporis in locis singulis inter octantes & quadraturas, & decrementum ejus inter octantes & syzygias, est in eâdem ratione. Motus autem nodorum, quo tempore luna percurrit singulas orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicatâ ratione temporis. Est enim (b) motus iste, dum luna percurrit *PM* (cæteris paribus) ut *ML*, & *ML* est in duplicatâ ratione temporis. Quare (c) motus nodorum in syzygiis, eo tempore confectus quo luna datas orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicatâ ratione numeri 11073 ad numerum 11023; estque (d) decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum vero totum ut 100 ad 11073 quam proxime.

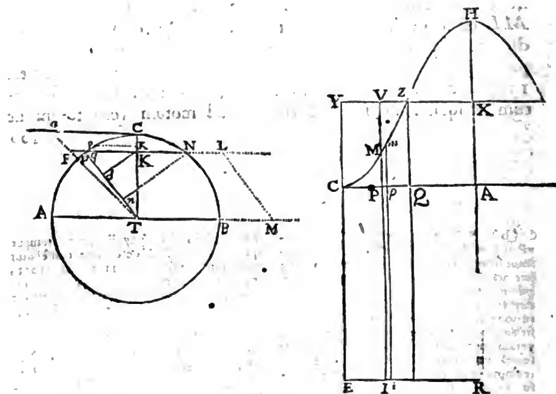
(b) * *Est enim motus iste (cæteris paribus) ut ML, & ML est in duplicatâ ratione temporis*, motus nodorum generatur per actionem vis Solaris 3 I T quæ uniformis manere censetur dum describitur arcus PM, hinc crescit LM in duplicatâ ratione temporis Lem. X. Lib. I., expressit autem Newtonus motum nodorum. fingendo in puncto ipso P, à Sole simul & semel eam actionem imprimi quæ toto tempore quo arcus PM describitur ab ipso exercita fuisset, & lineam LM esse spatium quod velocitate ita productâ ipso eo tempore quo arcus PM percurritur describeretur, hinc itaque constat eam lineam fore in duplicatâ ratione temporis, (vid. not. 28. & 30. lib. 1.) hæc autem linea LM est proportionalis verò effectui actionis Solis (vid. not. h Prop. XXX. hujusce).

(c) * *Quare motus nodorum.* Momentum areæ in syzygiis sive velocitas Lunæ in syzygiis est ad velocitatem mediocrem in octantibus ut 11073 ad 11023 ergo tempus quo Luna æquales arcus PM describet in syzygiis est ad tempus quo eos arcus PM describere censebatur velocitate mediocri ut 11023 ad 11073, motus ergo nodorum in syzygiis fit minor quàm adsumptus fuerat in ratione duplicatâ numerorum 11023 & 11073.

(d) * *Estque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum totum ut 100 ad 11073.* Motus reliquus est ad motum totum ut $\overline{11023}^2$ ad $\overline{11073}^2$ sive ut $\overline{11073-50}^2$ ad $\overline{11073}^2$; sive priorem quantitatem ad quadratum evehendo secundum formulam vulgarem dignitatum ut $\overline{11073}^2 - 2\times 50\times 11073 + \overline{50}^2$ ad $\overline{11073}^2$ negligatur terminus $\overline{50}^2$, cæterorum enim respectu evanescit fiet motus reliquus ad totum ut $\overline{11073}^2 - 2\times 50\times 11073$ ad $\overline{11073}^2$, & dividendo per 11073, ut $11073 - 2\times 50$ ad 11073.

Est ergo differentia motûs reliqui & motus totius h. e. motûs decrementum ad motum totum, ut 2×50 sive 100 ad 11073, ideoque etiam est motus decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973. 114.

100 ad 11073 quam proximè. (e) Decrementum autem in locis inter octantes & syzygias, & incrementum in locis inter octantes & quadraturas, est quam proximè ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in syzygiis & differentia inter quadratum sinus distantiæ lunæ à quadraturâ & semissem quadrati radii ad semissem quadrati radii conjunctim. Unde

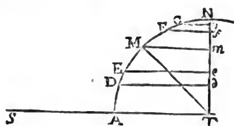


116 (e) * *Decrementum inter octantes & syzygias & incrementum inter octantes & quadraturas est quam proximè &c.* Resumptis iis quæ in Prop. XXVI. not. 112. sunt dicta, designet CP distantiam Lunæ à quadraturâ, lineâ IM exprimet ejus velocitatem & IV exprimet velocitatem mediocrem, idcircò tempus quo describitur arcus PM hâc velocitate IM, est ad tempus quo velocitate mediocri IV describeretur, ut IV ad IM, ideoque motus nodorum verus foret ad eorum motum si Luna mediocri suâ velocitate ferretur ut $\overline{IV}^2$ ad $\overline{IM}^2$ sive ut IV^2 ad $\overline{IV \pm VM}^2$ aut ut IV^2 ad $IV^2 \pm 2IV \times VM + VM^2$ & neglectâ quantitate $\overline{VM}^2$ divisisque terminis per IV ut IV ad $IV \pm 2VM$; & convertendo differentia motus veri nodorum & motus inventi, est ad motum inventum ut $\pm 2VM$ ad $IV \pm 2VM$, hinc illa differentia, sive incrementum aut

(f) Unde si nodi in quadraturis versentur, & capiantur loca duo æqualiter ab octante hinc inde distantia, & alia duo à syzygiâ & quadraturâ iisdem intervallis distantia, deque decrementis motuum in locis duobus inter syzygiam & octantem, sub-

aut decrementum motus nodorum est semper æquale motui nodorum qualis inventus fuerat ducto in 2 V M & diviso per J V ± V M, ideoque cum J V ± 2 V M pro constanti assumi possit quia 2 V M ferè evanescit respectu quantitatis J V, est illud incrementum aut decrementum ut motus nodorum qualis inventus fuerat & V M conjunctim; est verò V M differentia inter Z Q & M P, & sunt Z Q & M P ut quadrata sinuum arcuum C Q & C P, arcus verò C Q est 45gr. ex demonstratis ad Prop. XXVI. & quadratum ejus sinus est semissis quadrati radii; C P verò est distantia Lunæ à quadraturâ; Ergo, incrementum aut decrementum motus nodorum est ut motus nodorum qualis inventus fuerat & differentia inter quadratum sinus distantiæ Lunæ à quadraturâ & semissem quadrati radii conjunctim: In syzygiis quadratum sinus distantiæ Lunæ à quadratura est ipsum quadratum radii, unde differentia quadrati sinus distantiæ Lunæ à quadraturâ & semissis quadrati radii, est in hoc casu ipse semissis quadrati radii, hinc erit decrementum aut incrementum motus nodorum in loco quovis ad decrementum ejus motus in syzygiis ut sunt motus nodorum iis in locis ad motum nodorum in syzygiis (quales citra hanc correctionem inventi fuerant,) & ut differentiæ quadratorum sinuum distantiæ Lunæ à quadraturâ & semissis quadrati radii ad eum semissem quadrati radii conjunctim. Q. E. O.

(f) * *Unde si nodi* &c. Versentur nodi in Quadraturis, capiantur loca F & E ab octante M hinc inde æqualiter distantia, & alia duo D & G à syzygiâ A & quadraturâ N distantia intervallis D A, G N quæ æqualia sint inter se, & eadem ac intervalla M E, M F, sumantur decrementa motus nodorum in punctis E & D & ex summa eorum decrementorum subducatur summa incrementorum in punctis G & F, & residuum erit ipsum decrementum in syzygia A. 114.



Etenim, per præcedentia, decrementa sive incrementa; sunt ut motus totus nodorum & differentia quadrati sinus distantiæ Lunæ à quadraturâ & semissis radii conjunctim; est verò motus totus nodorum, ut contentum sub sinubus distantiarum Lunæ à quadraturâ, Lunæ à nodo, & nodi à Sole (per Prop. XXX.) sinus autem distantiæ nodi à Sole, in hoc casu est ipse Radius, estque constans pro omnibus incrementis decrementisque assumendis, distantia verò Lunæ à nodo eadem est ac distantia Lunæ à quadraturâ, cum nodi sint in quadraturis; Ergo motus totus nodorum est ut quadratum sinus distantiæ Lunæ à quadraturâ, & decrementa sive incrementa sunt ut contentum sub quadrato sinus distantiæ Lunæ à quadraturâ & sub differentiâ ejusdem quadrati & semissis radii.

Dicatur itaque Radius r, sinus arcus N G dicatur s, erit incrementum motus nodorum in G ut $ss \times \frac{1}{2} rr - ss$ sive $\frac{1}{2} r^2 s^2 - s^4$.

Ut obtineatur incrementum motus nodorum in F, observandum, quod siquidem arcus F M est æqualis arcui N G cujus sinus est s, & N F + F M est æqualis octanti cujus sinus est $r \sqrt{\frac{1}{2}}$ & per Principia Trigonometrica, sinus arcus qui est differentia duorum arcuum quorum sinus sunt dati, est æqualis differentiæ fa-

DE MUNDI SYSTEMATE.

ſubducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ ſunt inter octantem & quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in ſyzygiâ: uti rationem ineunti facile conſtabit. (g) Proindeque decrementum mediocre, quod de nodorum motu mediocri ſubduci debet, eſt pars quarta decrementi in ſyzygia. Motus totus horarius nodorum in ſyzygiis, ubi luna radio ad terram ducto aream tempori proportionalem deſcribere ſupponebatur, erat $32''. 42'''. 7^{iv}$. Et decrementum motus nodorum, quo tempore luna jam velocior deſcribit idem ſpa-

814. ctorum ſinûs majoris arcus per coſinum minoris & ſinus minoris arcus per coſinum majoris, diviſæ per Radium, hinc ſinus arcus F N eſt æqualis $\frac{r\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{rr-ss} - sr\sqrt{\frac{1}{2}}}{r} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{rr-ss} - s\sqrt{\frac{1}{2}}$, itaque incrementum nodorum in F erit $\frac{1}{2} \times \overline{rr-ss-s\sqrt{rr-ss}} + \frac{ss}{2} \times \frac{1}{2}rr - \frac{1}{2}\overline{rr-ss} + s\sqrt{rr-ss} - \frac{ss}{2}$ ſive deletis terminis æqualibus & oppoſitis $\overline{\frac{1}{2}rr - s\sqrt{rr-ss}} \times s\sqrt{rr-ss}$, & multiplicatione factâ $\frac{1}{2}r^2 s\sqrt{rr-ss} - r^2 s^2 + s^4$. Ideoque ſumma incrementorum in G & F eſt $\frac{1}{2}r^2 s\sqrt{rr-ss} - \frac{1}{2}r^2 s^2$.

Sinus autem in E & D ſunt coſinus arcuum F & G, ergo quadratum ſinus arcus N E eſt $rr - \frac{1}{2} \times \overline{rr-ss+s\sqrt{rr-ss}} - \frac{1}{2}ss = \frac{1}{2}rr + s\sqrt{rr-ss}$; Ideoque decrementum motus nodorum in E eſt $\overline{\frac{1}{2}rr + s\sqrt{rr-ss}} \times \overline{\frac{1}{2}rr + s\sqrt{rr-ss} - \frac{1}{2}rr} = \frac{1}{2}r^2 s\sqrt{rr-ss} + r^2 ss - s^4$.

Quadratum ſinus arcus N D eſt $rr-ss$, ideoque decrementum motus nodorum in D eſt $\overline{rr-ss} \times \overline{rr-ss-\frac{1}{2}rr} = \frac{1}{2}r^4 - \frac{3}{2}r^2 s^2 + s^4$; Sicque ſumma decrementorum eſt $\frac{1}{2}r^4 + \frac{1}{2}r^2 s\sqrt{rr-ss} - \frac{1}{2}r^2 s^2$.

Denique in ipsâ ſyzygiâ quadratum ſinus arcus N D eſt rr, ideoque decrementum motus nodorum in ſyzygia eſt $r^2 \times \overline{r^2 - \frac{1}{2}r^2} = \frac{1}{2}r^4$.

Si ergo ex ſumma decrementorum quæ inventa eſt $\frac{1}{2}r^4 + \frac{1}{2}r^2 s\sqrt{rr-ss} - \frac{1}{2}r^2 s^2$ detrahatur ſumma incrementorum quæ inventa eſt $\frac{1}{2}r^2 s\sqrt{rr-ss} - \frac{1}{2}r^2 s^2$ decrementorum reſiduum eſt ipſum $\frac{1}{2}r^4$ quod decrementum motus nodorum in ſyzygia exprimet. Q. E. D.

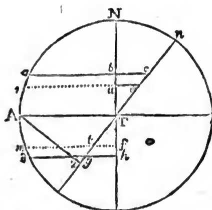
(g) * *Proindeque decrementum mediocre* &c. In toto arcu N A, puncta aſſumantur quam proxima quotquot lubebit quæ quaternatim ſumantur, ita ut quatuor quæ ſimul aſſumuntur ita diſponantur ut duo ab octante æqualiter diſtent hinc inde & alia duo tantumdem à ſyzygia & quadratura diſtent; Decrementum motus nodorum in duobus punctis quæ ſunt inter ſyzygiam & octantem ſuperat incrementum ejus motus in aliis duobus punctis quantitate æquali decremento in ipsâ ſyzygiâ; ſi itaque motus mediocris aſſumendus ſit, id decrementum quadrifariam dividi debet & de motu mediocri ſingula quarta pars detrahi debet, ſic enim motus mediocris ille æquipollebit motui vero peracto in illis quatuor punctis ſimul ſumptis; ille decrementi exceſſus idem eſt pro quibuſvis punctis ita quaternatim ſumptis itaque motus mediocris nodorum in omnibus punctis adjectâ conſideratione inæqualitatis motus Lunæ ex actione Solis ortæ erit motus mediocris nodorum prius inventus, mulctatus quartâ parte illius decrementi.

Cum

spatium, diximus esse ad hunc motum ut 100 ad 11073; ideoque decrementum illud est $17^{'''}. 43^{iv}. 11^{v}$, cujus pars quarta $4^{'''}. 25^{iv}. 48^{v}$ motui horario mediocri superius invento $16^{''}. 21^{'''}. 3^{iv}. 30^{v}$ subducta, relinquit $16^{''}. 16^{'''}. 37^{iv}. 42^{v}$ motum mediocrem horarium correctum.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXI. PROBL. XII.

(h) Si nodi versantur extra quadraturas, & spectentur loca bina à syzygiis hinc inde æqualiter distantia; summa motuum nodorum, ubi luna versatur in his locis, erit ad summam motuum, ubi luna in iisdem locis & nodi in quadraturis versantur, ut *AZ qu.* ad *AT qu.* Et (i) decrementa motuum, à cau-

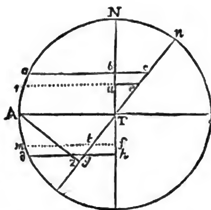


Cum ergo ille excessus decrementorum super incrementa sit ipsum decrementum motus in syzygiâ Seorsim consideratâ, & id decrementum in syzygiâ seorsim inventum sit, *decrementum mediocre quod de nodorum motu mediocri subduci debet est pars quarta decrementi in syzygiâ.*

(h) * *Si nodi versantur extra quadraturas* putà in locis n *& spectentur loca bina a & d à syzygiâ A hinc inde distantia* erit motus nodorum in loco *a* ut Elementum *acer* & quadratum lineæ AZ conjunctim (cor. 1. prop. 30.); similiter motus nodorum in loco *d* erit ut elementum *mrgd* & quadratum lineæ AZ conjunctim; si verò nodi versentur in quadraturis erit (ibid.) summa motuum in binis locis *a* & *d* ut $abru + mfdh$, vel $2abrv$ & quadratum radii AT conjunctim; sed ob æqualia intervalla Tb, Th summa arearum $acer + mrgd = 2abru$. Quare summa motuum nodorum ubi Luna versatur in locis *a*, *d* nodis existentibus extra quadraturas, erit ad summam motuum ubi Luna in iisdem locis & nodi in quadraturis versantur ut $2abru \times AZ^2$ ad $2abru \times AT^2$ hoc est ut AZ^2 ad AT^2. 1141

(i) * *Et decrementa motuum* in loco *a* quando nodi sunt extra quadraturas, & quando nodi sunt in quadraturis, sunt ut ipsi motus; Nam cum arcus *ar* in utroque casu æquali tempore percurratur, differentia ejus temporis à tempore mediocri utrinque eadem erit, ac per consequens error nodi, à loco in quo eo tempore medio-

causis jam expositis oriunda, erunt ad invicem ut ipsi motus, ideoque motus reliqui erunt ad invicem ut *AZ qu.* ad *AT qu.* & motus mediocres ut motus reliqui. Est itaque motus mediocris horarius correctus, in dato quocunque nodorum situ, ad $16''. 16'''. 37^{iv}. 42^{v}$. ut *AZ qu.* ad *AT qu.*; id est, ut quadratum sinus distantiæ nodorum à syzygiis ad quadratum radii.



114. mediocri procedere debuisset, est ut ejus motus horarius in eo loco; ergo decrementum motus nodi in *a* ubi nodi sunt in quadraturis est ad decrementum motus in *a* cum nodi extra quadraturas versantur ut $abru \times AT^2$ ad $acer \times AZ^2$, & pariter decrementum motus nodi in *d* ubi nodi sunt in quadraturis est ad decrementum motus in *d* cum nodi sunt extra quadraturas, ut $mfhd \times AT^2$ ad $mtgd \times AZ^2$; decrementa autem motus in *a* & *d* æqualia sunt quando nodi sunt in quadraturis, ob æquales distantias à syzygiâ, & $mfhd = abru$; hinc decrementum motus in *a* cum nodi extra quadraturas versantur est ad $acer \times AZ^2$ ut decrementum motus in *d* cum nodi extra quadraturas versantur est ad $mtgd \times AZ^2$, & etiam ut decrementum in *a*, aut *d* cum nodi sunt in quadraturis ad $abru \times AT^2$; Ergo summa decrementorum in *a* & *d* cum nodi sunt extra quadraturas est ad $acer + mtgd \times AZ^2$ ut summa decrementorum in *a* & *d* cum nodi sunt in quadraturis ad $2\,abru \times AT^2$, sed $acer + mtgd = 2\,abru$ per notam præcedentem, ergo, summa decrementorum in binis locis à syzygiis hinc inde æqualiter distantibus cum nodi sunt extra quadraturas est ad summam decrementorum in iisdem locis cum nodi sunt in syzygiis, ut AZ^2 ad AT^2, cum ergo summæ motuum ipsorum in eâ sint ratione, reliqui motus erunt in eâ ipsâ ratione ideoque & motus mediocres; *Est itaque &c.*

PRO-

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XIII.

Invenire motum medium nodorum lunæ.

Motus medius annuus eſt ſumma motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Concipe nodum verſari in N, & ſingulis horis completis retrahi in locum ſuum priorem, ut non obſtante motu ſuo proprio, datum ſemper ſervet ſitum ad ſtellas fixas. Interea verò ſolem S, per motum terræ, progredi à nodo, & curſum annuum apparentem uniformiter complere. Sit autem Aa arcus datus quam minimus, quem recta TS ad ſolem ſemper ducta, interſectione ſui & circuli NAn, dato tempore quam minimo deſcribit: & motus horarius mediocris (per jam oſtenſa) erit ut AZq, id eſt (ob (1) proportionales AZ, ZY) ut rectangulum ſub AZ & ZY, hoc eſt, ut area $AZYa$. Et ſumma omnium horariorum motuum mediocrium:

(1) * *Ob proportionales AZ, ZY* eſt enim TA : Aa :: AZ : ZY, ideoque ob conſtantes TA & Aa, quantitates AZ, ZY ubique eamdem habent inter ſe rationem, ducatur utraque in AZ facta AZ×AZ, & ZY×AZ datam rationem ubique habebunt, erit itaque *AZq ut rectangulum ſub AZ & ZY.*

crium ab initio, ut ſumma omnium arearum *aYZA*, id eſt, ut area *NAZ*. Eſt (m) autem maxima *AZYa* æqualis rectangulo ſub arcu *Aa* & radio circuli; & propterea ſumma omnium rectangulorum in circulo toto ad ſummam totidem maximorum, ut area circuli totius ad rectangulum ſub circumferentiâ totâ & radio, id eſt, ut 1 ad 2. Motus autem horarius, rectangulo maximo reſpondens, (n) erat $16''. 16'''. 37^{iv}. 42^{v}$. Et hic motus, anno toto ſidereo dierum 365. hor. 6. min. 9. fit $39^{gr}. 38'. 7''. 50'''$. Ideoque hujus dimidium $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. eſt motus medius nodorum circulo toti reſpondens. Et motus nodorum, quo tempore ſol pergit ab *N* ad *A* eſt ad $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. ut area *NAZ* ad circulum totum.

Hæc ita ſe habent ex hypotheſi, quod nodus horis ſingulis in locum priorem retrahitur, ſic ut ſol anno toto completo ad nodum eundem redeat à quo ſub initio digreſſus fuerat. Verùm per motum nodi fit ut ſol citius ad nodum revertatur, & computanda jam eſt abbreviatio temporis. (o) Cum ſol anno toto conficiat 360 gradus, & nodus motu maximo eodem tempore conficeret $39^{gr}. 38'. 7''. 50'''$, ſeu 39,6355 gradus; & motus mediocris nodi in loco quovis *N* ſit ad ipſius motum mediocrem in quadraturis ſuis, ut *AZq* ad *ATq*: erit motus ſolis ad motum nodi in *N*, ut 360 *ATq* ad 39,6355 *AZq*; id

514. (m) * *Eſt autem maxima AZYa &c.* Nam quando TA eſt perpendicularis in Nn, AZ evadit TA & ZY evadit æqualis Aa, ſicque AZY = AT × Aa, in omnibus autem aliis punctis TA eſt major quam AZ, & Aa major quam ZY, maxima itaque AZYa eſt *æqualis rectangulo ſub arcu Aa & radio circuli.*

(n) * *Erat* $16''. 16'''. 37^{iv}. 42^{v}$, is enim erat motus horarius mediocris, cum nodi erant in Quadraturis, per Prop. præced. ideoque in hâc Propoſ. cum SAT eſt perpendicularis in Nn.

(o) * *Cum Sol &c.* Velocitas ſolis eſt ad velocitatem nodi cum nodi ſunt in quadraturis ut 360^{d}. quæ eſt via ſolis toto anno ad 39. 38'. 7''. 50''' ſeu 39.6355 gradus quos nodus toto anno conficeret, ſi toto anno maximâ ſua celeritate moveretur; Velocitas nodi cum nodi ſunt in quadraturis, eſt ad nodi velocitatem cum nodi diſtant à Sole arcu AN ut AT*q* ad AZ*q* per Prop. præced. Ergo ex æquo & compoſitis rationibus, velocitas ſolis eſt ad velocitatem nodi cum nodi diſtant à Sole arcu AN ut 360 AT*q* ad 39.6355 AZ*q*; id eſt, dividendo 360 per 39.6355 ut 9.0827667 AT*q* ad AZ*q*. Sed dividendo 360 per $39^{gr}. 38'\ 7''\ 50'''$ prodit numerus 9.0827646 loco hujuſce 9.0827667 collocandus.

id est, ut 9,0827646 ATq ad AZq. Unde si circuli totius circumferentia NAn dividatur in particulas æquales Aa, tempus quo sol percurrat particulam Aa, si circulus quiesceret, erit ad tempus quo percurrit candem particulam, si circulus unà cum nodis circa centrum T revolvatur, reciprocè ut 9,0827646 ATq ad 9,0827646 $ATq + AZq$. Nam tempus est reciprocè ut velocitas quâ particula percurritur, & hæc velocitas est summa velocitatum solis & nodi. Igitur si tempus, quo sol sine motu nodi percurreret arcum NA, exponatur per sectorem NTA, & particula temporis quo percurreret arcum quàm minimum Aa, exponatur per sectoris particulam ATa; & (perpendiculò aY in Nn demisso) si in AZ capiatur dZ, ejus longitudinis (p) ut sit rectangulum dZ in ZY ad sectoris parti-

LIBER TERTIUS. PROP. XXXII. PROBL. XIII.

(p) * *Ut sit Rectangulum dZ in ZY ad sectoris particulam ATa.* Sectoris particula ATa est semper æqualis dimidio Rectanguli AT in Aa, est verò ZY ad Aa ut AZ ad AT, ducantur antecedentes in dZ & consequentes in $\frac{1}{2}$ AT erit rectangulum dZ in ZY ad $\frac{1}{2}$ AT × Aa sive ad sectoris particulam ATa ut dZ in AZ ad $\frac{1}{2}$ ATq sive ut dZ in 2AZ ad ATq, sed sumitur esse dZ in ZY ad ATa ut AZq ad 9.0827646 ATq+AZq ergo etiam dZ in 2AZ est ad ATq ut AZq ad 9.0827646 ATq+AZq & vicissim dZ in 2AZ est ad AZq ut ATq ad 9.0827646 ATq+AZq & dividendo duos priores terminos per 2AZ est dZ ad $\frac{1}{2}$ AZ ut ATq ad 9.0827646 ATq+AZq. 1541

DE MUNDI SYSTEMATE. particulam ATa ut AZq ad 9,0827646 $ATq+AZq$, id est, ut sit dZ ad $\frac{1}{2}$ AZ ut ATq ad 9,0827646 $ATq+AZq$; (q) rectangulum dZ in ZY designabit decrementum temporis ex motu nodi oriundum, tempore toto quo arcus Aa percurritur. Et si punctum d (r) tangit curvam $NdGn$, area curvilinea NdZ erit decrementum totum, quo tempore arcus totus NA per-

114. (q) * *Rectangulum dZ in ZY designabit decrementum temporis ex motu nodi oriundum*; Nam, ex superioribus, tempus quo sol percurrit arcum A a sine motu nodi, est ad tempus quo sol à nodo discedet eo arcu A a si (ipse nodus moveatur) ut 9.0827646 $ATq+AZq$ ad 9.0827646 ATq; hinc convertendo, differentia eorum temporum est ad prius tempus ut AZq ad 9.0827646 $ATq+AZq$, sed, ex hypothesi, sectoris particula A T a designat prius tempus, ea ergo quantitas $dZ\times ZY$ quæ est ad A T a ut AZq ad 9.0827646 $ATq+AZq$ *exprimet decrementum temporis ex motu nodi oriundum.*

(r) * *Et si punctum d tangit curvam NdGn.* Numerus 360 designetur per a numerus 39.6355 dicatur b, ideoque 9.0827646 sit $\frac{a}{b}$, A T dicatur r, & A Z, y eritque $dZ=\frac{\frac{1}{2}r^2y}{\frac{a}{b}r^2+y^2}=\frac{\frac{1}{2}br^2y}{ar^2+by^2}$ & in puncto T ubi AZ evadit AT sive ubi fit $y=r$ est $dZ=\frac{\frac{1}{2}br}{a+b}=\frac{r}{20.1655292}$; ita ut d Z ad vicesimam radii partem nusquam assurgat.

Est autem ex naturâ circuli $TZ=\sqrt{rr-yy}$, & T Z ad A Z ut fluctio ordinatæ A Z ad Z Y, ideoque $ZY=\frac{ydy}{\sqrt{rr-yy}}$, hinc elementum $dZ\times ZY=\frac{\frac{1}{2}br^2y^2dy}{(ar^2+by^2)\sqrt{rr-yy}}$ & elementum segmenti N A Z est $\frac{y^2dy}{\sqrt{rr-yy}}$.

Est verò $\sqrt{rr-yy}$ æqualis seriei $r-\frac{y^2}{2r}-\frac{y^4}{8r^3}-\frac{y^6}{16r^5}-\frac{5y^8}{128r^7}-\frac{7y^{10}}{256r^9}$ &c. & $\frac{y^2}{\sqrt{rr-yy}}$ æqualis seriei $\frac{y^2}{r}+\frac{y^4}{2r^3}+\frac{3y^6}{8r^5}+\frac{5y^8}{16r^7}+\frac{35y^{10}}{128r^9}+\frac{63y^{12}}{256r^{11}}$ &c. quæ series parùm convergit quando y accedit ad valorem r unde prudenter est adhibenda.

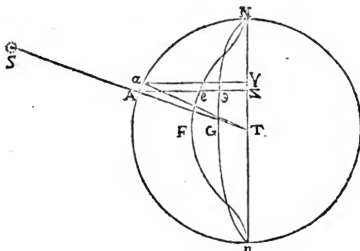
Multiplicetur verò hæc series per dy & fiat integratio, obtinetur sequens series quæ exprimit segmentum N A Z, $\frac{y^3}{3r}+\frac{y^5}{10r^3}+\frac{3y^7}{56r^5}+\frac{5y^9}{144r^7}+\frac{35y^{11}}{1408r^9}$ &c. quæ series parum convergit quando $y=r$ sed tunc segmentum N A Z est quadrans circuli qui per alias commodiores approximationes obtinetur.

Dividatur $\frac{1}{2}br^2$ per ar^2+by^2, fit series $\frac{b}{2a}\times 1-\frac{by^2}{ar^2}+\frac{b^2y^4}{a^2r^4}-\frac{b^3y^6}{a^3r^6}+\frac{b^4y^8}{a^4r^8}$ &c. quæ plurimum convergit propter dignitates crescentes fractionis $\frac{b}{a}$ quæ est circiter $\frac{1}{9}$.

Mul-

percutitur; & propterea excessus sectoris *NAT* supra aream *NdZ* erit tempus illud totum. Et quoniam motus nodi tempore

LIBER TERTIUS. PROP. XXXII. PROBL. XIII.



Multiplicetur itaque per hanc seriem, series $\frac{y^2}{\sqrt{rr-yy}}$ superius inventa & obtinebitur hæc series 115.

$$\frac{b}{2a}\times\frac{y^2}{r}+\frac{y^4}{2r^3}+\frac{3y^6}{8r^5}+\frac{5y^8}{16r^7}+\frac{35y^{10}}{128r^9}+\frac{63y^{12}}{256r^{11}}\ \&c.$$

$$-\frac{b^2}{2a^2}\times\qquad\frac{y^4}{r^3}+\frac{y^6}{2r^5}+\frac{3y^8}{8r^7}+\frac{5y^{10}}{16r^9}+\frac{35y^{12}}{128r^{11}}\ \&c.$$

$$+\frac{b^3}{2a^3}\times\qquad\frac{y^6}{r^5}+\frac{y^8}{2r^7}+\frac{3y^{10}}{8r^9}+\frac{5y^{12}}{16r^{11}}\ \&c.$$

$$-\frac{b^4}{2a^4}\times\ -\ \cdot\ -\ \frac{y^8}{r^7}+\frac{y^{10}}{2r^9}+\frac{3y^{12}}{8r^{11}}\ \&c.$$

&c.

& multiplicetur hæc series per dy & integretur, fiet series quæ exhibebit valorem areæ N d Z

$$\frac{b}{2a}\times\frac{y^3}{3r}+\frac{y^5}{10r^3}+\frac{3y^7}{56r^5}+\frac{5y^9}{144r^7}+\frac{35y^{11}}{1408r^9}+\frac{63y^{13}}{3408r^{11}}\ \&c.$$

$$-\frac{b^2}{2a^2}\qquad\frac{y^5}{5r^3}+\frac{y^7}{14r^5}+\frac{3y^9}{72r^7}+\frac{5y^{11}}{176r^9}+\frac{35y^{13}}{1664r^{11}}$$

$$+\frac{b^3}{2a^3}\times\qquad\frac{y^7}{7r^5}+\frac{y^9}{18r^7}+\frac{3y^{11}}{88r^7}+\frac{5y^{13}}{206r^{11}}$$

$$-\frac{b^4}{2a^4}\times\qquad\frac{y^9}{9r^7}+\frac{y^{11}}{22r^9}+\frac{3y^{13}}{104r^{11}}$$

 Termi-

pore minore minor eſt in ratione temporis, debebit etiam area *AaYZ*

115. Termini variabiles primæ lineæ hujuſce ſeriei, ſeriem ipſam illam conſtituunt quæ eſt valor ſegmenti N A Z, ejus itaque primæ lineæ valor eſt $\frac{b}{2a}$ N A Z.

Si dividantur omnes termini ſecundæ lineæ per $\frac{y^2}{r^2}$, obſervabitur quotientes hanc habere relationem ad terminos correſpondentes primæ lineæ, ut, ſi exponens litteræ y in termino quovis primæ lineæ dicatur ζ, quantitas eadem quæ in prima linea dividitur per ζ, in ſecunda linea dividatur per $\zeta + 2$; ſic termino primo ſecundæ lineæ diviſo per $\frac{y^2}{r^2}$ ut evadat $\frac{y^3}{5r}$, quantitas communis $\frac{y^3}{r}$ in prima linea dividitur per 3, in ſecunda per 5, ſicque in omnibus terminis utriuſque lineæ, ut facile conſtabit ex ipsâ origine iſtius ſeriei, & Integrationis lege, hinc ſi ad communem denominatorem reducantur termini utriuſque lineæ, ducendus erit numerator primæ lineæ in $\zeta + 2$, numerator ſecundæ in ζ, & denominator communis erit $\zeta \times \zeta + 2$; quare ſubductis terminis ſecundæ lineæ à terminis primæ differentia exprimetur per terminos primæ ſeriei ductos in $\frac{2}{\zeta + 2}$ quod ſeriei convergentiam plurimum augebit; ideoque termini variabiles ſecundæ lineæ erunt

$$\frac{y^2}{r^2} \times NAZ - \frac{y^2}{r^2} \times \frac{2y^3}{15r} + \frac{2y^5}{70r^3} + \frac{6y^7}{504r^5} + \frac{10y^9}{1584r^7}$$

&c. dicatur ad brevitatem ſeries horum terminorum *D* & valor verus iſtius ſecundæ lineæ eſt $-\frac{b^2y^2}{2a^2r^2}$ N A Z $+ \frac{b^2y^2}{2a^2r^2} \times$ D.

Simili ratiocinio, ut referantur termini variabiles tertiæ lineæ ad ſecundam, dividantur omnes termini tertiæ lineæ per $\frac{y^2}{r^2}$, & ſi dicantur γ exponentes terminorum, differentia terminorum ſecundæ & tertiæ lineæ exprimetur per terminos ſecundæ ſeriei ductos in $\frac{2}{\gamma + 2}$, ideoque termini variabiles tertiæ lineæ erunt $\frac{y^4}{r^4} \times NAZ - \frac{y^4}{r^4} \times D - \frac{y^2}{r^2} \times \frac{2y^5}{35r^3} + \frac{2y^7}{126r^5} + \frac{6y^9}{792r^7}$ dicatur E ſeries horum terminorum & valor verus tertiæ lineæ erit $+ \frac{b^3y^4}{2a^3r^4} \times NAZ - \frac{b^3y^4}{2a^3r^4} \times D - \frac{b^3y^2}{2a^2r^2}$ E

ex quibus facile intelligitur valorem areæ N d Z exprimi poſſe hac ratione.

$$\frac{b}{2a} \times NAZ.$$

$$- \frac{b^2y^2}{2a^2r^2} \times NAZ + \frac{b^2y^2}{2a^2r^2} D$$

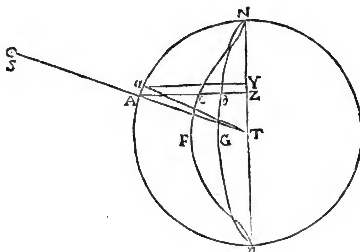
$$+ \frac{b^3y^4}{2a^3r^4} \times NAZ - \frac{b^3y^2}{2a^3r^4} D - \frac{b^3y^2}{2a^3r^2} E$$

$$- \frac{b^4y^6}{2a^4r^6} \times NAZ + \frac{b^4y^6}{2a^4r^6} D + \frac{b^4y^4}{2a^4r^4} E + \frac{b^4y^2}{2a^4y^2} F \text{ \&c.}$$

Unio

AaYZ diminui in eâdem ratione. Id quod fiet fi capiatur in *AZ* longitudo *eZ*, quæ fit ad longitudinem *AZ* ut *AZq* ad

LIBER TERTIUS. PROP. XXXII. PROB. XIII.



Unde fummæ coefficientium quantitatum NAZ, D, E, F, qui progreffiones Geometricas formant juxta regulas vulgares obtineri poffunt, ideoque tandem area NdZ 115
eft $\frac{\frac{1}{2}br^2}{ar^2+by^2}\text{NAZ}+\frac{\frac{1}{2}b^2y^2}{a^2r^2+aby^2}\text{D}-\frac{\frac{1}{2}b^3y^2}{a^3r^2+a^2by^2}\text{E}+\frac{\frac{1}{2}b^4y^2}{a^4r^4+a^3by^2}\text{F}$ &c.

Cor. 1. Primus terminus feriei quæ exprimitur per D eft $\frac{2}{5}$ primi termini feriei quæ exprimit fegmentum NAZ, & reliqui termini feriei D funt minores refpectu reliquorum terminorum feriei quæ exprimit id fegmentum, ergo D minor eft quam $\frac{2}{5}$ NAZ, & pariter E minor eft quam $\frac{3y^2}{7r^2}$ D, & F minor quam $\frac{5y^2}{9r^2}$ &c. hinc valor NdZ major effe nequit quantitate $\frac{\frac{1}{2}br^2}{ar^2+by^2}\text{NAZ}+\frac{\frac{1}{5}b^2y^2}{a^2r^2+aby^2}$ NAZ, = $\frac{b\,\text{NAZ}}{ar^2+by^2}\times\frac{1}{2}r^2+\frac{b}{5a}y^2$ nec minor effe poteft quantitate $\frac{b\,\text{NAZ}}{ar^2+by^2}\times\frac{1}{2}r^2$.

Cor. 2. Hinc ubi $r=y$ & NAZ eft quadrans circuli valor areæ NdZ major non eft quantitate $\text{NAZ}\times\frac{b}{a+b}\times\frac{1}{2}+\frac{b}{5a}$, nec minor quam $\text{NAZ}\times\frac{b}{a+b}\times\frac{1}{2}$; five major non eft quadrantis portione $\frac{1}{20.1655292}+\frac{1}{457.8068865}$ five quadrantis $\frac{1}{19.3147492}$ nec minor quadrantis portione $\frac{1}{20.1655292}$.

 Cor.

De Mundi Systemate.

ad 9,08276 *ATq* + *AZq*. ([s]) Sic enim rectangulum *e Z* in *ZY* erit ad aream *AZYa* ut decrementum temporis, quo arcus *Aa* percurritur, ad tempus totum quo percurreretur, si nodus quiesceret: & propterea rectangulum illud respondebit decremento motus nodi. Et si punctum *e* tangat curvam *NeFn*, area tota *NeZ*, quæ summa est omnium decrementorum, respondebit decremento toti, quo tempore arcus *AN* percurritur; & area reliqua *NAe* respondebit motui reliquo, qui verus est nodi motus, quo tempore arcus totus *NA* per solis & nodi conjunctos motus percurritur. ([t]) Jam vero area semicirculi est ad aream figuræ *NeFn*, per methodum serierum infinitarum quæsitum, ut 793 ad 60 quamproximè. Motus autem qui respondet circulo toti erat $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. & prop-

116. Cor. 3. In casibus in quibus y est quam minima, ita ut ar^2+by^2 pro ar^2 sumi possit, valor $\frac{b\,NAZ}{ar^2}\times\frac{1}{2}r^2$ ad verum valorem satis accedet fietque valor areæ NdZ $=\frac{1}{18.1655292}$ segmenti NAZ, unde habentur veluti limites valoris areæ NdZ in variis punctis curvæ.

(s) * *Sic enim rectangulum e Z in ZY erit ad aream AZYa*, &c. Ex præcedentibus, area AZYa motum nodorum mediocrem exprimit posito solem sine motu nodi percurrere arcum Aa, si itaque cæteris manentibus celerius percurratur. is arcus, motus nodorum sive spatium à nodis percursum minus erit, prout tempus erit brevius; cum ergo tempus quo sol percurrit Aa sine motu nodi, sit ad tempus quo percurreretur Aa posito motu nodi ut 9.0827645 ATq + AZq ad 9.0827646 ATq si fiat AZ ad Ae in eâ ratione & utrumque ducatur in ZY, erunt areæ AZ × ZY, ad Ae × ZY ut motus nodorum in Hypothesi priori ad eorum verum motum; & convertendo erit eZ × ZY ad AZ×ZY ut differentiâ motuum ad motum priorem sive ut AZq ad 9.0827646 ATq + AZq.

(t) 116. * *Jam verò area semicirculi est ad aream NeFn.* Commodius calculi ducentur si prius quæramus aream NAneN inter semiperipheriam NAn & curvam Nen contentam, quàm detrahemus ex semicirculi area; tumque residuum erit area NeFn, quam cum semicirculi area conferre licebit.

Sit ergo ut prius 3608 $=a$, 39°.6355 $=b$, AT $=r$ & ATr & AZ $=y$; erit ex notâ præcedenti 9,0827646 ATq + AZq (sive $\frac{ar^2}{b}+y^2$ ad 9.0827646 ATq (sive $\frac{ar^2}{b}$) ut AZ (sive y) ad Ae quod erit itaque $\frac{ar^2y}{ar^2+by^2}$; est verò ZY $=\frac{y\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$, hinc Elementum areæ aAe est $\frac{ar^2y^2dy}{ar^2+by^2\sqrt{rr-yy}}$ sed elementum areæ curvæ NdGn notâ superiore 115 inventum erat $\frac{\frac{1}{2}br^2y^2dy}{(a^2+by^2)\sqrt{rr-yy}}$ ergo elementum areæ curvilineæ NAnFN est ad elementum areæ NdGn in ratione datâ a ad $\frac{1}{2}b$; Unde si valor hujus areæ NdGn in notâ r inventus per $\frac{1}{2}$ dividatur & multiplicetur per a habebitur valor areæ NAnFN qui itaque prodibit

ar^2

propterea motus, qui figuræ *NeFn* duplicatæ respondet, est 1gr. 29′. 58″. 2‴. Qui de motu priore subductus relinquit 18gr. 19′. 5″. 53‴. motum totum nodi respectu fixarum inter sui ipsius conjunctiones cum sole; & hic motus de solis motu annuo graduum 360 subductus, relinquit 341gr. 40′. 54″. 7‴. motum solis inter easdem conjunctiones. Iste autem motus est ad motum annuum 360gr. ut nodi motus jam inventus 18gr. 19′. 5″. 53‴. ad ipsius motum annuum, qui propterea erit 19gr.

18l

$\frac{ar^2}{ar^2+by^2}$ NAZ $+ \frac{by^2}{ar^2+by^2}$ D $-$ $\frac{b^2y^2}{a^2r^2+by}$ E $+ \frac{b^3y^2}{a^3r^2+a^2by^2}$ F &c.

Tollatur verò hæc area ex segmento NAZ, sive ex $\frac{ar^2+by^2}{ar^2+by^2}$ NAZ residuum erit $\frac{by^2}{ar^2+by^2}$ NAZ $- \frac{by^2}{ar^2+by^2}$ D $+$ $\frac{b^2y^2}{a^2r^2+bay^2}$ E $- \frac{b^3y^2}{a^3r^2+a^2by^2}$ F &c. idque residuum est area quæsita NeZ, quod brevius expressum fit $\frac{by^2}{ar^2+by^2} \times$ NAZ $-$ D $+ \frac{b}{a}$ E $- \frac{b^2}{a^2}$ F &c. 116

Jam autem ut habeatur ratio semicirculi ad aream NeFn, sive quod idem est quadrantis circuli ad NFT ejus areæ NeFn dimidium; dicatur *c* quadrans peripheriæ cujus radius est *r*; sitque *m* ad *n* ut *c* est ad *r*; valor quadrantis est $\frac{rc}{2}$, & cum NAZ est quadrans tum

 y=r,

18'. 1''. 23'''. Hic est motus medius nodorum in anno sidereo. (u) Idem per tabulas astronomicas est 19gr. 21' 21''. 50'''. Differentia minor est parte trecentesimâ motus totius, & ab orbis lunaris eccentricitate & inclinatione ad planum eclipticæ oriri videtur. Per eccentricitatem orbis motus nodorum nimis acceleratur, & per ejus inclinationem vicissim retardatur aliquantulum, & ad justam velocitatem reducitur.

PRO-

116. $y = r$ ergo valor dimidii areæ NeFn est $\overline{\frac{b}{a+b} \times \frac{rc}{2} - D + \frac{b}{a}E - \frac{b^2}{a^2}F + \frac{b^3}{a^3}G}$ &c. ex iis autem quæ in notâ (r) dicta sunt, valor D (ponendo r loco y) est $r^2 \times \frac{2}{15} + \frac{2}{70} + \frac{6}{504} + \frac{10}{1584} + \frac{70}{18304}$; qui termini ad decimales reducti faciunt $.184\,r^2$ Omittantur reliqui termini quantitatis D ut & quantitates E, F de quâ omissione postea dicemus, & quoniam est $r = \frac{nc}{m}$ ideoque $r^2 = \frac{nrc}{m} = \frac{2n}{m} \times \frac{rc}{2}$. Valor areæ evadit $\frac{b}{a+b} \times \overline{\frac{rc}{2} - \frac{rc}{2} \times \frac{2n}{m} \times .184}$ qui valor est ad valorem quadrantis $\frac{rc}{2}$, ut $\frac{b}{a+b} \times \overline{1 - \frac{2n}{m} \times .184}$ ad 1, substituendo autem loco b & a, eorum valores, est $\frac{b}{a+b} = .099$; & ex naturâ circuli est $2n$ ad m, sive Diameter ad quartam peripheriæ partem ut 1.274 ad 1 ideoque $\frac{2n}{m} \times .184 = 1.27 \times .184 = .23$, quod detractum ex unitate relinquit .766; Quod tandem ductum in $\frac{b}{a+b}$ sive .099 efficit .0758 qui valor est ad 1; ut area quæsita ad quadrantem; manebit eadem ratio si uterque terminus per 793 ducatur sed .0758 in 793 efficit 60.10. Ergo est area quæsita NeFn ad semicirculum ut 60. proximè ad 793. Q. E. I.

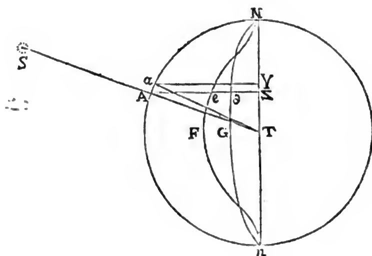
Omisimus terminos seriei D præter quinque priores, & terminos serierum E, F &c. facile enim deprehenditur ex Corollariis notæ (r) ultimos illos terminos seriei D, prope æquales fieri terminis seriei E ductæ in $\frac{a}{b}$ qui termini negativi sunt, sicque mutuò destrui reliquæ verò series cum per dignitates fractionis $\frac{b}{a}$ ducantur brevi evanescunt ut quidem exploravimus calculo ad plures terminos producto.

(u) * *Idem per tabulas Astronomicas.* Cassinus ex antiquis observationibus nodorum motum determinat in anno communi 19°. 19'. 45''. quibus additis 49'' pro motu nodi per 6^h. 10' 54''' quibus annus sidereus excedit annum communem, motus ergo nodorum in anno sidereo est 19°. 20'. 34''., ita ut exiguâ duntaxat quantitate differat motus nodorum per calculum inventus, ab eo qui ex observationibus deducitur, & is dissensus est adeo parvus, ut neutiquam turbet argumentum quo confirmetur Newtoniana Theoria ex calculo motus nodorum cum observationibus collato; imo dissensus istius causas ex orbis Lunæ excentricitate & inclinatione fluere indicat Newtonus, sed hæc hujus non sunt loci.

PROPOSITIO XXXIII. PROBLEMA XIV.

Invenire motum verum nodorum lunæ.

In tempore quod est ut area $NTA - NdZ$, motus iste est ut area NAe, & inde datur. (x) Verum ob nimiam calculi difficultatem, præstat sequentem problematis

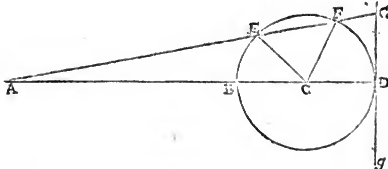


(x) 117. * *Verum ob nimiam calculi difficultatem.* Satis liquet maximam futuram calculi difficultatem ex ipsis seriebus in notis 115 & 116 adhibitis, quæ cum parum convergant, regressum non tantùm difficilem, sed etiam parùm tutum habent; hinc alia artificia commodiora adhibet Newtonus quæ ut intelligantur duas Hypotheses assumere liceat quibus pedetentim ad ipsam constructionem Newtonianam deveniemus.

Prior ergo Hypothesis ea sit quam in Prop. XXXII. fingit Newtonus, singulis horis retrahi nodum in locum suum priorem, ut nonobstante motu suo proprio datum servet situm ad fixas, interea verò solem progredi à nodo: Eâ quippe in Hypothesi, ex Prop. XXXII. tota area circuli repræsentat totum nodorum motum integro anno sidereo, ideoque sectores NAT repræsentabunt motum medium eo tempore quo Sol discedit à nodo arcu NA & segmenta NAZ repræsentabunt motum verum eo ipso tempore, ideoque Triangulum ATZ repræsentabit differentiam motus medii à motu vero, quæ debebit substrahi à motu medio ut verus motus habeatur in primo quadrante, & tertio ut ex ipsâ figurâ liquet; addi autem in secundo & quarto: Cum itaque tota area circuli sive factum totius Peripheriæ in $\frac{1}{2} r$, designet totum motum nodorum durante anno sidereo, repræsentabit ATZ eam æquationem, quæ æquatio cum AZ sit y & $TZ = \sqrt{rr - yy}$ est: 117.

DE MUNDI SYSTEMATE.

tis conſtructionem adhibere. Centro C, intervallo quovis CD, deſcribatur circulus $BEFD$. Producatur DC ad A, ut ſit AB ad AC ut motus medius ad ſemiſſem motus veri mediocris, ubi nodi ſunt in quadraturis, id eſt, ut $19^{gr}.\ 18'.\ 1''.$

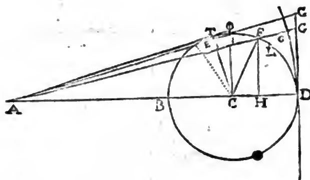


$23'''$. ad $19^{gr}.\ 49'.\ 3''.\ 55'''$, atque ideo BC ad AC ut motuum differentia $0^{gr}.\ 31'.\ 2''.\ 32'''$, ad motum poſteriorem $19^{gr}.,\ 49'.\ 3''.\ 55'''$. hoc eſt, ut 1 ad $38\frac{1}{10}$; dein per punctum D ducatur infinita Gg, quæ tangat circulum in D; & ſi capiatur

117. eſt $\frac{1}{2}y\sqrt{rr-yy}$: Dividatur ergo tam circuli valor quam areæ ATZ valor per $\frac{1}{2}r$, erit Peripheria tota ad $\frac{y\sqrt{rr-yy}}{r}$ ut totus motus nodi anno ſidereo ad Æquationem quæſitam, ſive primum conſequentem duplicando & ſecundi antecedentis dimidium ſumendo quod proportionem non turbat, erit Peripheria tota ad $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$, ut motus ſemeſtris nodi ad Æquationem quæſitam; Sed ex Principiis Trigonometricis, ſinus ejus arcus qui foret duplus arcus NA cujus ſinus eſt y foret $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$; Ergo ſi deſcribatur circulus radio quocumque CB, & ſumatur arcus BF duplus, arcus NA, hoc, eſt duplus diſtantiæ Solis à nodo (quæ diſtantia per motus medios Solis & nodi haberi poteſt) erit Peripheria tota ad FH ſinum ejus arcus BF ut motus ſemeſtris nodi ad æquationem quæſitam; ideo producatur DCB in A, ita ut radius AD ſit ad radium CD ut Peripheria tota ad motum ſemeſtrem nodi ſive ut a ad $\frac{1}{4}b$, & centro A radio AD deſcribatur arcus DG & ſumatur ejus arcus longitudo quæ ſit æqualis ſinui FH, numerus graduum ejus arcus DG erit ipſa æquatio quæſita; nam ſi ſumeretur in circulo cujus radius eſt CD arcus DL cujus longitudo eſſet æqualis FH, foret tota Peripheria ſeu 360g. ad numerum graduum in eo arcu DL contentorum ut numerus graduum motus ſemeſtris nodi ad numerum graduum æquationis quæſitæ, ſive alternando tota Peripheria ad numerum graduum motus ſemeſtris ut numerus graduum arcus DL ad numerum graduum æquationis quæſitæ; ſed ex conſtru-

piatur angulus BCE vel BCF æqualis duplæ diſtantiæ ſolis à loco nodi, per motum medium invento; & agatur AE vel AF ſecans perpendiculum DG in G; & capiatur angulus qui ſit ad motum totum nodi inter ipſius ſyzygias (id eſt, ad $9^{gr}. 11'. 3''.$) ut tangens DG ad circuli BFD circumferentiam totam; atque angulus iſte (pro quo angulus DAG uſurpari poteſt) ad

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIII. PROBL. XIV.



ſtructione cum longitudo arcus D G ſumatur æqualis ſinui F H, ſive arcui D L, numerus graduum in eo arcu D L contentorum eſt ad numerum graduum in arcu D G contentorum inverſe ut eorum circulorum radii, hoc eſt ex conſtructione, ut 360° ad numerum graduum motus ſemeſtris nodi, ergo numerus graduum arcus D G eſt ipſe numerus graduum æquationis quæſitæ; Satis liquet autem arcum D G paucorum graduum eſſe debere, & à lineâ rectâ parum differre, hinc ſi in puncto D erigatur tangens ad circulum cujus radius eſt CD, ſumaturque DG in tangente æqualis ipſi ſinui F H, perinde prope erit ac ſi ſumeretur ea longitudo ſecundum arcum circuli radio A D deſcripti, & punctum G ſive in Tangente ſive in arcu ſumatur eodem in loco ocurret quam proximè; ita ut ex hâc conſtructione, angulus G A D cujus arcus D G eſt menſura ſit ipſa æquatio quæſita, ſubſtractiva in 1°. & 3°. quadrante, additiva in 2°. & 4to. & obtinebitur juxta Trigonometriæ Principia, dicendo ut A C, ſive $360^{gr} - 9^{gr}. 54'. 31''. 57'''$, ad C F ſive C B, nempe $9^{d}. 54'. 31'' 57'''$

hoc eſt, ut $a - \frac{1}{4} b$ ad $\frac{1}{4} b$, ſive ut $35 \frac{1}{3}$ ad 1. 117.
Ita ſinus duplæ diſtantiæ Solis à nodo ad Æquationem quæſitam: Maxima autem erit æquatio in octantibus, quia area ATZ quæ æquationem repræſentat eſt major in octantibus quam in ullo alio loco.

His probè intellectis facile inde ad veriorem computum procedere licebit.

2°. Hyp. In conſtructione Newtonianâ Prop. XXXII. circulus integer N A n N deſignat annum ſidereum, ſimulque motum nodorum in Hypotheſi quòd Sol ipſe deſcribit id' ſpatium quo nodi reverâ ab ipſo diſcedunt; in hâc autem Hypotheſi motus nodorum eſt $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. & in calculis noſtris per quantitatem $\frac{1}{2} b$ fuit expreſſum.

Si autem reverâ arcus A N repræſentet receſſum Solis à nodo, tàm per motum proprium Solis quàm per medium motum nodi, tempus quo tota circumferentia N A n N deſcribetur non erit annus ſidereus, ſed tempus elapſum inter ſyzygiam Solis Nodique & ſyzygiam ſequentem Solis cum eodem nodo, cumque uniformi-

De Mundi Systemate.

ad motum medium nodorum addatur ubi nodi transeunt à quadraturis ad syzygias, &. ab eodem motu medio subducatur ubi tran-

817. ter describatur ea circumferentia siquidem ad motus medios solis & nodorum refertur, sectores circuli N A n N erunt proportionales motui medio nodorum; itaque si totus circulus repræsentet motum nodorum à tempore quo sol & nodus fuere conjuncti usque ad sequentem Solis syzygiam cum eodem nodo, sector A T N repræsentabit motum medium nodorum eo tempore quo motu medio Solis & nodi, nodus & Sol arcu N A à se mutuo recessére.

Tempus autem, inter duas syzygias Solis cum eodem nodo, hâc ratione à Newtono determinatur per observationes; anno sidereo dum nempe sol 360gr. emetitur motus nodi per observationes Astronomicas 19gr. 21'. 21''. 50''' deprehenditur, in eâdem autem erunt proportione viæ Solis & nodi quæ simul describuntur quocumque tempore, ideoque via Solis & via nodi inter duas syzygias Solis cum eodem nodo, erunt inter se ut 360 ad 19gr. 21' 21'' 50''', sed illæ duæ viæ simul sumptæ 360gr. efficiunt, itaque 360 gradus dividantur in duas partes quarum una sit ad alteram ut 360gr. ad 19gr. 21' 21'' 50'''. Hæc ultima pars quæ est 18gr. 22'. 6'' circiter, erit motus nodi inter duas syzygias Solis cum eodem nodo.

Idem motus ex calculo Prop. XXXII., hoc modo determinabitur, si ex toto circulo N A n N duplum areæ NFn tollatur residuum est verus motus nodi inter syzygias; sed valor areæ N F T erat ad quadrantem ut $\frac{b \times .766}{a+b}$ ad 1. sive proximè ut $\frac{\frac{3}{4}b}{a+b}$ ad 1. In eâdem vero erit ratione duplum areæ N F n (quod est quadruplum areæ N F T) ad totum circulum, ut itaque 1. ad $\frac{\frac{3}{4}b}{a+b}$ ita $\frac{1}{2}b$ qui est numerus graduum quem area circuli designat, ad numerum graduum designatum per duplum areæ N F n, qui erit itaque $\frac{\frac{3}{8}b^2}{a+b}$; Cum ergo totus circulus numerum graduum $\frac{1}{2}b$ designet in Prop. XXXII., & duplum areæ N F n designet $\frac{\frac{3}{8}b^2}{a+b}$, hoc ex $\frac{1}{2}b$ tollatur, residuum $\frac{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}b^2}{a+b}$ est verus motus nodi inter syzygias.

Itaque cum motus medius nodorum fit ut sector A T N, & motus verus nodi exprimatur per aream N A e; Æquatio est ut A T N − N A e, hoc est, cum totus circulus repræsentet motum nodorum inter syzygias, est $2rc$ ad A T N − N A e ut $\frac{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}b^2}{a+b}$ ad Æquat. $\frac{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}$ (A T N − N A e), sed in not. 116. valor areæ N A e fuit inventus $\frac{ar^2}{ar^2 + by^2}$ N A Z (omissis cæteris terminis qui per D, E &c. multiplicantur ut pote minimis).

Itaque fiet æquatio $\frac{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}$ (NTA − $\frac{ar^2}{ar^2 + by^2}$ N A Z):

Eum autem casum sumamus in quo A N est peripheriæ octans, quia in primâ Hypothesi liquet eo in casu Æquationem fieri maximam, fiet $y^2 = \frac{1}{2}r^2$, & eâ substitutione factâ & loco N T A posito ejus valore TAZ + NAZ factâque reductione, evadet æquatio $\frac{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}$(TAZ + $\frac{\frac{1}{2}b\,\text{NAZ}}{a + \frac{1}{2}b}$) & cum area circuli sit .785 dum quadratum Diametri est 1, & octans circuli N T A sit ad ejus quadrati octantem cujus dimidium est T A Z in eâdem ratione, est N T A ad T A Z ut .785 ad .5; ideo

transeunt à syzygiis ad quadraturas; habebitur eorum motus verus. Nam motus verus sic inventus congruet quam proximè cum

ideoque dividendo est NAZ ad TAZ ut .285 ad .5, & est NAZ $=$ .57 TAZ unde tandem æq. evadit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc\,(a+b)}\left(\frac{a+.78b}{a+\frac{1}{2}b}\right)$ TAZ Sed in hâc hypothesi est TAZ $=\frac{1}{4}r^2$; hinc æquatio fit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{4c\times 2(a+b)}\left(\frac{a+.78b}{a+\frac{1}{2}b}\right)r$ & ad hanc proportionem revocatur, $4c$ sive tota circumferentia est ad $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2\,(a+b)}$ quod est dimidium motus nodi inter syzygias ut $\frac{a+.78b^2}{a+\frac{1}{2}b}r$ ad Æquationem; 117.
hoc modo autem construitur quantitas $\frac{a+.78b}{a+\frac{1}{2}b}r$, sive simplicius $\frac{a+\frac{3}{4}b}{a+\frac{1}{2}b}r$, describatur circulus BCD cujus radius BC $=r=\frac{1}{4}b$; producatur CB in A ut sit AB $=a+\frac{1}{4}b$, ideoque AC $=a+\frac{1}{2}b$ & AD $=a+\frac{3}{4}b$, centro C erigatur per-

DE MUNDI SYSTEMATE.

cum motu vero qui prodit exponendo tempus per aream *NTA*

117. pendicularis Φ ad circulum usque & pariter in extremo Diametri D ducatur tangens, ductaque linea A Φ donec secet Tangentem in G, liquet quod A C sive $a + \frac{1}{2} b$ est ad A D sive $a + \frac{3}{4} b$ ut est CΦ sive r ad D G quæ erit $\frac{a + \frac{3}{4} b}{a + \frac{1}{2} b} r$, ideoque erit tota circumferentia ad dimidium motus inter syzygias ut D G ad Æquationem quæsitam: sive invertendo terminos omnes & alternando ut Newtoni expressio habeatur, est Æquatio ad motum nodi inter Syzygias proximas ut D G ad circuli B E D circumferentiam.

Illa autem Æquatio quæsita erit prope æqualis angulo D A G; nam in Triangulo D A G est D G ad sinum anguli D A G sive ad ipsum angulum D A G (nam in parvis angulis, angulos pro sinubus sumere licet) ut est A G vel A D, quod est $a + \frac{3}{4} b$, ad sinum totum sive ad radium C D quod est $\frac{1}{4} b$; sed si $a + \frac{3}{4} b$, & $\frac{1}{4} b$ dividantur per $a + b$, quod rationem non mutat, fiatque $\frac{a + \frac{3}{4} b}{a + b}$ ad $\frac{\frac{1}{4} b}{a + b}$ ita a sive gradus 360 ad quartum, invenitur is quartus terminus $\frac{\frac{1}{4} a^2 b + \frac{1}{4} a b^2}{(a + \frac{3}{4} b)(a + b)}$; Divisione factâ per $a + \frac{3}{4} b$ Quotiens est $\frac{\frac{1}{4} a b + \frac{1}{16} b^2}{a + b}$ omissis, ut licet, dignitatibus altioribus $\frac{1}{4} b$, is verò quotiens est ipsa quantitas $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{2(a + b)}$ quæ exprimit dimidium motus nodi inter syzygias; Ergo resumendo cum sit D G ad angulum D A G ut $a + \frac{3}{4} b$ ad $\frac{1}{4} b$ sive ut circumferentia tota ad dimidium motus nodi inter syzygias in eâque ratione sit D G ad Æquationem, ipse angulus DAG est æqualis æquationi.

Idem alio modo constabit; In ipsâ Peripheriâ D Φ B D, sumatur arcus D L æqualis D G, erit ut $360^{gr.}$ ad dimidium motus nodi, ita numerus graduum in arcu D L contentorum ad numerum graduum æquationis; centro A radio A D describatur arcus & in eo sumatur longitudo D G æqualis D L, erit ut radius A D sive $a + \frac{3}{4} b$ ad radium CD sive $\frac{1}{4} b$; ita numerus graduum arcus DL ad numerum graduum arcus D G, numeri enim graduum in arcubus æqualibus sunt inversè ut eorum radii

$NTA - NdZ$, & motum nodi per aream NAe; ut rem perpendenti

117.

radii sed $a + \frac{1}{4}b$ est ad $\frac{1}{4}b$ ut 360gr. sive a ad dimidium motus nodi sive ad $\frac{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}b^2}{2(a+b)}$; Est ergo 360 ad dimidium motus nodi inter syzygias ut numerus graduum arcus D L ad numerum gradum arcus D G sed ita etiam erat numerus graduum arcus D L ad numerum graduum æquationis quæsitæ, ergo numerus graduum arcus D G est ipsa æquatio quæsita, sed A G secabit arcum DG in puncto tali ut arcus inter eam lineam & punctum D interceptus sit proxime æqualis Tangenti D G, nam in parvis arcubus, Tangentes prope æquantur suis arcubus, ergo linea A G secabit arcum D G in G quamproxime, sed arcus D G cujus gradus sunt ipsa æquatio, est mensura anguli DAG, ergo angulus DAG pro æquatione usurpari potest.

Dicit autem Newtonus lineam A B debere esse ad lineam A C ut motus medius ad semissem motus veri mediocris quando nodi sunt in quadraturis, id est, ut 19gr. 18'. 1''. 23'''. ad 10gr. 49'. 3''. 55'''. In hâc autem constructione fecimus $AB = a + \frac{1}{4}b$ & $AC = a + \frac{1}{2}b$, res autem eodem redit, cum enim motus nodi inter syzygias sit $\frac{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}b^2}{a+b}$ dematur ex a habebitur motus Solis inter syzygias $\frac{aa + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{8}b^2}{a+b}$; iste motus Solis erit ad ejus motum annuum 360gr. sive a ut motus nodi inter syzygias $\frac{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}b^2}{a+b}$ ad motum annuum nodi qui itaque erit $\frac{\frac{1}{2}a^2b + \frac{1}{8}ab^2}{aa + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{8}ab^2}$ is itaque motus erit ad $\frac{1}{2}b$ quod exprimit semissem motus veri mediocris ubi nodi sunt in quadraturis ut $\frac{1}{2}a^2b + \frac{1}{8}ab^2$ ad $\frac{1}{2}aab + \frac{1}{4}abb - \frac{1}{16}b^3$, sive omisso termino $\frac{1}{16}b^3$, divisis reliquis terminis per ab & duplicatis ut $a + \frac{1}{4}b$ ad $a + \frac{1}{2}b$; Ergo in constructione nostra est A B sive $a + \frac{1}{4}b$ ad A C sive $a + \frac{1}{2}b$ ut motus annuus nodi, ad semissem ejus quod toto anno describeretur eo motu quem habent nodi in quadraturis; Itaque erit etiam $a + \frac{1}{4}b$ ad $a + \frac{1}{2}b$ sive A B ad A C ut motus medius nodi ad semissem motus veri in quadraturis ut statuit Newtonus; Observandum quidem ex hâc constructione æquationem futuram maximam quando linea A G tangit circulum, quod quidem incidit paulò ante punctum ϕ, & si à puncto A ducatur tangens A T erit ut A C ad C T ita sinus totus ad Cosinum anguli B C T, qui angulus, B C T deprehendetur esse $88^{\circ}\frac{1}{2}$. cujus dimidium $44\frac{1}{4}^{\circ}$. est verus locus medius in quo maxima fit æquatio, ab Octante adeo parum distitus ut in sequentibus æquationem maximam fieri in Octantibus supponere liceat, tanto magis quod hæc æquatio quæ vere maxima foret ab ea quæ fit in Octantibus insensibiliter differret.

3ª. *Hypoth.* Finximus arcum A N esse octantem Peripheriæ, & eo in casu ostendimus constructionem Newtonianam exhibere æquationem illi loco debitam, in aliis distantiis Solis à nodo paulo minus accurata est constructio, sed errore exiguo; ubivis enim, æquatio erit $\frac{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}$

$$(TAZ + NAZ - \frac{ar^2}{ar^2 + by^2} NAZ) = \frac{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)} (TAZ + \frac{by^2}{ar^2 + by^2} NAZ))$$

sumatur NAZ esse ad TAZ ut $r - \sqrt{rr - yy}$ ad $\sqrt{rr - yy}$, quod quidem verum est de spatio Rectilineo N A Z non vero de curvilineo N A Z, sed propter exiguitatem fractionis $\frac{by^2}{ar^2 + by^2}$ errorem

ti & computationes instituenti constabit. Hæc est æquatio semestris

117. torem non magnum pariet, fit æquatio $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}\left(\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+by^2}\right)$ TAZ sive numeratore & denominatore quadruplicato quod valorem non mutat, fit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{4c\times 2(a+b)}\left(\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+by^2}\right)\frac{4TAZ}{r}$, quæ quantitas ad hanc proportionem revocatur, $4c$ sive tota circumferentia est ad $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2(a+b)}$ quod est dimidium motus nodi inter syzygias ut $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+2by^2}\times\frac{4TAZ}{r}$ ad Æquationem quæsitam.

Ut construatur hæc quant. $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{r^2-y^2}}}{ar^2+by^2}$ & $\frac{4TAZ}{r}$, fiat ut prius circulus BFD cujus radius $BC=r=\frac{1}{4}b$, ideoque $b=4r$, producaturque CB in A ita ut sit $AB=a+\frac{1}{4}b$, sumatur arcus BF duplus arcus AN, ductoque perpendiculo FH, & tangente erectâ in D ductâque AFG erit DG prope æqualis quantitati $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{r^2-y^2}}}{ar^2+by^2}\times\frac{4TAZ}{r}$; est enim ex constructione AH ad AD ut FH ad DG ideoque $DG=\frac{AD}{AH}FH$ est autem $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{r^2-y^2}}}{ar^2+by^2}\times\frac{4TAZ}{r}=\frac{AD}{AH}\times$ FH, nam posito $4r$ loco b & utroque termino diviso per r^2, fit $\frac{a+\frac{4y^2}{\sqrt{rr-yy}}}{a+\frac{4y^2}{r}}$; Valor mediocris quadrati y^2 est $\frac{1}{2}r^2$, unde $\frac{4y^2}{\sqrt{rr-yy}}=\frac{4y^2}{r\sqrt{\frac{1}{2}}}$ & $\sqrt{\frac{1}{2}}$ est paulo major quam $\frac{2}{3}$ hinc $\frac{4y^2}{r\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{6y^2}{r}=3r$; Præterea

$4y^2$

mestris motus nodorum. Est & (y) æquatio menstrua, sed quæ

117

$\frac{2y^2}{r}$ valore suo medioci est r, est etiam $\frac{2y^2}{r}$ sinus versus arcus dupli ejus cujus sinus est y, ideoque $\frac{2y^2}{r}$ est accuratè æquale BH unde $a+\frac{4y^2}{r}$ est $a+r+$BH, sed $a+r$ per constructionem est AB, ergo $a+\frac{4y^2}{r}$ est AH, ideoque $\frac{a+\frac{4y^2}{\sqrt{rr-yy}}}{a+\frac{4y^2}{r}}=\frac{a+3r}{AH}$ absque errore sensibili, quia si $\frac{2y^2}{r}$ minus sit aut majus quam r, quoniam idem valor in numeratore ac denominatore occurrit, & ea quantitas non est magna respectu totius AH, manebit idem fractionis valor; sed $a+3r=$AD ideoque fractio $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-y^2}}}{ar^2+by^2}$ est proximè æqualis fractioni $\frac{AD}{AH}$.

Est vero accuratè $\frac{4TAZ}{r}=$FH, nam Triangulum TAZ $=\frac{AZ\times TZ}{2}$, est AZ $=y$, TZ $=\sqrt{rr-yy}$, ergo $\frac{4TAZ}{r}=\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$; Sed, ex Principiis Trigonometricis, sinus arcus dupli ejus cujus sinus est y, est $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$, ergo sinus arcus BF qui duplus est arcus AN cujus sinus est y est $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$, sed sinus arcus BF est FH ex constructione, ideoque FH $=\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}=\frac{4TAZ}{r}$, & quantitas $\frac{AD}{AH}\times$ FH $=\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+by^2}\times\frac{4TAZ}{r}$.

Quibus expositis, cætera, nempe angulum DAG pro æquatione sumi posse lineas AB ad AC sumendas esse ut motus medius nodi ad semissem ejus motus in quadraturis, cætera, inquam, patent ut in Hypothesi secundâ.

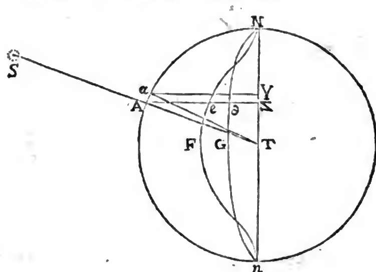
(y) * *Est & æquatio menstrua*, ex iis quæ

DE MUNDI SYSTEMATE.

quæ ad inventionem latitudinis lunæ minime neceſſaria eſt. Nam cum variatio inclinationis orbis lunaris ad planum eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia ſit, alteri ſemeſtri, alteri autem menſtruæ; inæqualitas & æquatio menſtrua nodorum ita ſe mutuò contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinanda latitudine lunæ negligi poſſunt.

Corol. Ex hac & præcedente propoſitione liquet quod nodi in (z) ſyzygiis ſuis quieſcunt, in quadraturis autem regrediuntur

quæ in Prop. XXX. & XXXI. dicta ſunt,
117. liquet quod dum Luna motu menſtruo circa terram fertur, nodi ſatis inæqualiter feruntur hinc ſi locus nodorum ex eorum motu medio æſtimaretur, locus ille medius à vero nonnihil differret, idque quod eſſet corrigendum ſecundum diverſam Lunæ ipſius diſtantiam à nodo Æquatio menſtrua meritò diceretur, ſed cum totus motus menſtruus Lunæ non ſit 25r. & compenſetur latitudinis error qui ex falsâ nodi poſitione oriretur per inclinationis Lunæ inæqualitates, operæ pretium non duxit Newtonus hanc Æquationem tradere, ſuo loco autem de eâ compenſatione agetur.



(z) * *Liquet quod nodi in ſyzygiis quieſcunt.* Etenim motus nodorum eſt ut area AZYa dempta area eZY, ubi verò nodi ſunt in ſyzygiis ideoque ubi punctum A incidit in N, evaneſcit linea AZ ac per conſequens area AZYa−eZY nullus itaque eſt nodorum motus. *In quadraturis autem regrediuntur motu horario 16″ 19‴ 26iv.* Si nodi diſtent 90gr. à Sole, AZ fit æqualis AT, & ZY=Aa, ideoque area AZYa quæ eſt Parallelogrammum ejuſdem altitudinis ac baſeos ac Triangulum ATa eſt ejus duplum, cumque eZ ſit ad AZ ut AZq ad 9.0827646 ATq + AZq ſitque AZ = AT in hoc caſu, ſit eZ = $\frac{AT}{10.08276}$ & area eZY eſt $\frac{AT \times Aa}{10.0827646}$ ſive duplum Trianguli ATa diviſum per 10.0827646 hinc motus nodi qui exprimitur per aream AZYa−eZY, eſt in hoc caſu

tur motu horario $16''. 19'''. 26^{iv}$. (a) Et quod æquatio motus nodorum in octantibus sit $1^{gr}. 30'$. Quæ omnia cum phænomenis cœlestibus probè quadrant.

Scholium.

Aliâ ratione motum nodorum *J. Machin Astron. Prof. Gresham.* & *Hen. Pemberton* M. D. seorsum invenerunt. Hujus methodi mentio quædam alibi facta est. Et utriusque chartæ, quas vidi, duas propositiones continebant, & inter se in utrisque congruebant. Chartam vero D. *Machin*, cum prior in manus meas venerit, hic adjungam.

DE

casu ad aream A T a ut $2 - \frac{2}{10.0827646}$ ad 1, sed quia tota area N A n N motum annuum designat $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. Triangulus A T a motum horarium repræsentans numerum graduum designabit qui obtineretur dividendo $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. per numerum horarum in anno sidereo comprehensarum & ea divisione factâ numerus graduum quem repræsentat Triangulus A T a invenietur $8''. 8'''. 18^{iv}. 51^{v}$. si itaque fiat 1. ad $\frac{18.0827646}{10.0827646}$ ita iste numerus ad quartum $8''. 8'''. 18^{v}. 51^{v}$. invenietur $16''. 19'''. 26^{iv}$. qui erit motus horarius quo nodi regrediuntur in quadraturis.

(a) * *Et quod Æquatio motus nodorum in octantibus sit* $1^{gr}. 30'$. Ex secundâ hypothesi notæ 117. Æquatio in Octantibus per hanc proportionem invenitur, ut tota circumferentia circuli B F D B ad dimidium motus nodi inter syzygias quod est $9^{gr}. 11'. 3''$. ita $\frac{a + .78\,b}{a + \frac{1}{2}b}\,r$ ad Æquationem quæsitam; est autem b ad a ut 1 ad 9.0827646, itaque $a + .78\,b$ est ut 9.8627646 & $a + \frac{1}{2}b$ ut 9.5827646 itaque fractio $\frac{a + .78b}{a + \frac{1}{4}b} = \frac{9.8627646}{9.5827646} =$ 1.0292191, quæ ducta in $r = \frac{1}{4}b = 9^{gr}. 54'. 31''. 57'''$. dat $10^{d}. 11'. 54''. 15'''. 8^{iv}. 11^{v}$., ducta iterum in $9^{gr}. 11'. 3''$, dat $93^{gr}. 39'. 49''. 48'''$., sed si radius r circuli B F D B exprimatur per numerum $9^{gr}. 54'. 31''. 57'''$., longitudo circumferentiæ continebit tales gradus $62^{gr}. 13'. 39''. 50'''$. Diviso itaque numero $93^{gr}. 39'. 49''. 48'''$ per $62^{gr}. 13'. 39''. 50'''$. Quotiens sive Æquatio quæsita est $1^{gr}. 30'. 18''$. &c. 117.

Calculum hunc integrum exhibuimus ut ostenderemus quomodo adhibendæ forent quantitates $4c$ & r quæ circumferentiam totam ejusque radium exhibent, cum enim is radius æquipolleat $\frac{1}{4}b$, & $\frac{1}{4}b$ sit $9^{gr}. 54'. 31''. 57'''$., cavendum ne $4c$ sive circumferentia tota, 360^{gr}. assumatur, sed debet assumi ejus numeri graduum qui sit ad $9^{gr}. 54'. 31''. 57'''$. ut est circumferentia ad Radium.

De hâc autem Æquatione semestri non agunt De la Hirius & Cassinus in Tabulis Astronomicis, nullius enim usus est ad calculum Eclipsium ad quem potissimum accommodantur pleræque Lunares Tabulæ; hanc autem Æquationem habent Tabulæ Rudolphinæ (pag. 87. Tabul.) & in Octantibus distantiæ Solis à nodo hanc faciunt $1^{gr}. 39'. 46''$., utrum accuratioribus Tabulis hæc æquatio ad $1^{gr}. 30'. 18''$. magis accederet ignoramus, at, qui probè

De Mundi Systemate.

DE MOTU NODORUM LUNÆ.

PROPOSITIO I.

„*Motus solis medius à nodo, definitur per medium proportio-„nale geometricum, inter motum ipsius solis medium, & motum „illum mediocrem quo sol celerrimè recedit à nodo in quadraturis.*

„Sit *T* locus ubi terra, *Nn* linea nodorum lunæ ad tempus „quodvis datum, *KTM* huic ad rectos angulos ducta, *TA* „recta circum centrum revolvens eâ cum velocitate angulari „quâ sol & nodus à se invicem recedunt, ita ut angulus inter „rectam quiescentem *Nn* & revolventem *TA*, semper fiat æ-„qualis distantiæ locorum solis & nodi. Jam si recta quævis „*TK* dividatur in partes *TS* & *SK* quæ sint ut motus solis „horarius medius ad motum horarium mediocrem nodi in qua-„draturis, & ponatur recta *TH* media proportionalis inter par-„tem *TS* & totam *TK*, hæc recta inter reliquas proportiona-„lis erit motui medio solis à nodo.

„Describatur enim circulus *NKnM* centro *T* & radio *TK*, „eodemque centro & semiaxibus *TH* & *TN* describatur ellip-„sis *NHnL*, & in tempore quo sol à nodo recedit per ar-„cum *Na*, si ducatur recta *Tba*, area sectoris *NTa* exponet „summam motuum nodi & solis in eodem tempore. Sit igitur „arcus *aA* quam minimus quem recta *Tba* præfatâ lege revol-„vens in datâ temporis particulâ uniformiter describit, & sector „quam minimus *TAa* erit ut summa velocitatum quâ sol & „nodus tum temporis seorsim feruntur. Solis autem velocitas „ferè uniformis est, utpote cujus parva inæqualitas vix ullam „indu-

117. bè norunt quam difficile sit observationes loci Nodi accuratissimas habere extrà Eclipses, & quantùm parvus error in latitudine Lunæ & in verâ inclinatione orbitæ assignandâ locum nodi mutet, non invenient hoc discrimen 9′ obesse, quominus dici possit æquationem ita inventam cum Phænomenis cœlestibus probè quadrare, & facile suspicabuntur errorem hunc observationi potius quam calculo esse tribuendum.

„inducit in medio nodorum motu varietatem. Altera pars hu„jus summæ nempe velocitas nodi in mediocri suâ quantitate, „augetur in recessu à syzygiis in duplicatâ ratione sinus distan„tiæ ejus à sole; per Coroll. Prop. 31. Lib. 3^{tii}. Princip. & „cum maxima est in quadraturis ad solem in *K*, ([b]) eandem „rationem obtinet ad solis velocitatem ac ea quam habet *SK*

„ad *TS* hoc est ([c]) ut (differentia quadratorum ex *TK* & *TH* „vel) ([d]) rectangulum *KHM* ad *TH* quadratum. Sed ellip„sis *NBH* dividit sectorem *ATa* summæ harum duarum ve„locitatum exponentem, in duas partes *ABba* & *BTb* ipsis „velocitatibus proportionales. Producatur enim *BT* ad circu„lum in β, & à puncto *B* demittatur ad axem majorem per„pen-

(b) * *Eamdem rationem obtinet per constructionem.*

(c) * *Ut differentia quadratorum ex TK & TH—ad TH quadratum.* Est ex constructione TK ad TH ut TH ad TS, est ergo TK² ad TH² ut TK ad TS, & dividendo $TK^2 - TH^2$ ad TH^2 ut TK—TS sive SK ad TS.

(d) * *Ut differentia quadratorum ex TK & TH vel rectangulum KHM.* Est enim $TK^2 - TH^2 = KH \times HM$, per 5^{am}. Lib. 2^{i}. Elem. Euclidis. 117.

„pendicularis BG, quæ utrinque producta occurrat circulo in „punctis F & f, & (e) quoniam ſpatium $ABba$ eſt ad ſecto„rem TBb ut rectangulum $AB\beta$ ad BT quadratum (rectangulum „enim illud æquatur differentiæ quadratorum ex TA & TB „ob rectam $A\beta$ æqualiter & inæqualiter ſectam in T & B.) „Hæc igitur ratio ubi ſpatium $ABba$ maximum eſt in K, ea„dem erit ac ratio rectanguli KHM ad HT quadratum, ſed „maxima nodi mediocris velocitas erat ad ſolis velocitatem in hâc „ratione. Igitur in quadraturis ſector ATa dividitur in partes velo„citatibus proportionales. Et (f) quoniam rectang. KHM eſt ad HT „quadr. ut FBf ad BG quad. (g) & rectangulum $AB\beta$ æqua„tur rectangulo FBf. Erit igitur areola $ABba$ ubi maxima „eſt ad reliquum ſectorem TBb, ut rectang. $AB\beta$ ad BG „qua-

117. (e) * *Et quoniam ſpatium $ABba$ &c.* Sector TAa eſt ad ſectorem TBb ut AT^2 ad BT^2, (quia propter parvitatem anguli ATa, non differt ſenſibiliter ſector BTb ab eo qui inter lineas AT, aT interciperetur & terminaretur arcu circuli centro T, radio TB deſcripti). Dividendo autem eſt $TAa - TBb$ ſive $ABba$ ad TBb ut $AT^2 - BT^2$ ad BT^2; eſt verò $AT^2 - BT^2 = AB \times B\beta$ (per 5. 2[i]. Lib. El.) ergo *$ABba$ ad TBb ut $AB\beta$ ad BT quadratum.*

(f) * *Et quoniam rectangulum KHM eſt ad HT quad. ut FBf ad BG quad.* Ex natura Ellipſeos & circuli circumſcripti, eſt KT ad HT ut FG ad BG, & quadrando KT^2 ad HT^2 ut FG^2 ad BG^2, & dividendo $KT^2 - HT^2$ ad HT^2 ut FG^2 ad BG^2, ſed (per 5[am]. Lib. 2[i]. Elem.) $KT^2 - HT^2 = KH \times HM$ & $FG^2 - BG^2 = FB \times Bf$ ergo KHM ad HT^2 ut FBf ad BG^2.

(g) * *Et rectangulum $AB\beta = FBf$* (per 35. 3[i]. Elem.) hoc ratiocinium ita exprimi poteſt, area $ABba$ ubi maxima eſt, eſt ad TBb ut $AB\beta$ ad BG^2 ergo ubi maxima eſt $ABba$ eſt $\frac{TB \times AB\beta}{BG^2}$, in aliis verò locis area $ABba$ eſt ad TBb ut $AB\beta$ ad BT^2, ergo illis in locis eſt $\frac{TBb \times AB\beta}{BT^2}$, eſt ergo area $ABba$ ubi maxima eſt ad aream $ABba$ in alio quovis loco ut $\frac{TBb \times AB\beta}{BG^2}$ ad $\frac{TBb \times AB\beta}{BT^2}$ ſive quia motus Solis qui per aream TBb exprimitur eſt ubique idem, eſt area $ABba$ ubi maxima eſt ad aream $ABba$ in alio quovis loco ut $\frac{1}{BG^2}$ ad $\frac{1}{BT^2}$ ſive ut BT^2 ad BG^2, ſed in Triangulo BTG eſt BT ad BG ut ſinus anguli recti G ad ſinum anguli BTG per Principia Trigonom. & diſtantia Solis à nodo ubi area $ABba$ eſt maxima, nempe in K, menſuratur per angulum rectum, & ubi eſt in loco quovis A per angulum BTG, ergo area $ABba$ ubi maxima eſt, eſt ad aream $ABba$ in alio quovis loco ut quadrata ſinuum diſtantiæ Solis à nodo in utrovis loco, ſed in eâ ſunt ratione motus nodorum in iis diſtantiis; Ergo ut eſt area $ABba$ ubi maxima eſt ad motum nodi in eo loco, ita eſt area $ABba$ in alio quovis loco ad motum nodi in eo loco, ſed ubi area $ABba$ maxima eſt, eſt ad motum nodi ut BTb ad motum Solis, ergo cum areæ BTb & motus Solis ubique eadem maneant, eſt etiam in quovis loco area $ABba$ ad motum nodi ut area BTb ad

„quadr. Sed ratio harum areolarum ſemper erat ut *ABβ* re- „ctang. ad *BT* quadratum; & propterea areola *ABba* in lo- „co *A* minor eſt ſimili areola in quadraturis, in duplicatâ ra- „tione *BG* ad *BT* hoc eſt in duplicatâ ratione ſinus diſtantiæ „ſolis à nodo. Et proinde ſumma omnium areolarum *ABba* „nempe ſpatium *ABN* erit ut motus nodi in tempore quo ſol „digreditur à nodo per arcum *NA*. Et ſpatium reliquum nem-

„pe ſector ellipticus *NTB* erit ut motus ſolis medius in eodem „tempore. Et propterea quoniam annuus motus nodi medius, „is eſt qui fit in tempore quo ſol periodum ſuam abſolverit, „motus nodi medius à ſole erit ad motum ipſius ſolis medium, „ut area circuli ad aream ellipſeos, hoc eſt ut recta *TK* ad re- „ctam *TH* mediam ſcilicet proportionalem inter *TK* & *TS*; vel „quod eodem redit ut media proportionalis *TH* ad rectam *TS*.

PRO-

ad motum Solis ſive alternando eſt ubique AB,ba ad BTb ut motus nodi ad motum Solis. *Et proinde ſumma omnium ABba &c.* 137.

De Mundi Systemate.

PROPOSITIO II.

„*Dato motu medio nodorum lunæ invenire motum verum.*

„Sit angulus *A* diſtantia ſolis à loco nodi medio, ſive motus „medius ſolis à nodo. Tum ſi capiatur angulus *B* cujus tangens „ſit ad tangentem anguli *A* ut *TH* ad *TK*, hoc eſt in ſubdu„plicatâ ratione motus mediocris horarii ſolis ad motum me„diocrem horarium ſolis à nodo in quadraturis verſante; erit „idem angulus *B* diſtantia ſolis à loco nodi vero. Nam jun„gatur *FT* & ex demonſtratione propoſitionis ſuperioris (h) erit „angulus *FTN* diſtantia ſolis à loco nodi medio, angulus au„tem *ATN* diſtantia à loco vero, & tangentes horum angu„lorum ſunt inter ſe ut *TK* ad *TH*.

„*Coroll.* Hinc angulus *FTA* eſt æquatio nodorum lunæ, „(i) ſinuſque hujus anguli ubi maximus eſt in octantibus, eſt „ad

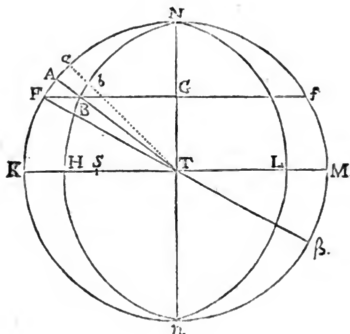
117\. (h) * *Erit angulus FTN diſtantia Solis à loco nodi medio.* Cum circulus NKnM repræſentet totum motum Solis à nodo inter ſyzygias proximas cum eodem nodo, ſectores ejus circuli ut F T N repræſentabunt motum medium Solis à Nodo, tempore quod erit ad totum tempus motus Solis inter ſyzygias cum eodem nodo, ut erit is ſector aſſumptus ad totum circulum.

Ducatur verò F G quæ occurrat Ellipſi in B, cumque ſectores Elliptici B T N repræſentent Solis motum qui uniformis ſupponitur, ii ſectores B T N ſunt proportionales tempori; ſed ſector Ellipticus B T N erit, ex natura Ellipſeos & circuli circumſcripti, ad totam Ellipſim ut ſector circularis FTN ad totum circulum, ideoque tempus quo Solis motus repræſentabitur per B T N erit idem ac tempus quo Sol à nodis receſſerit, motu medio repræſentato per F T N, ſed dum Sol deſcribit ſectorem B T N, vero motu recedit à nodo ſectore N T A, per dem. prop. ſuper. ergo ſector F T N repræſentat medium motum Solis à nodo eo tempore quo verus ejus à nodo motus repræſentari debet per N T A, ergo medius motus eſt ad verum ut angulus T N ad angulum A T N, Tangentes autem horum angulorum, ſumendo T G pro radio, ſunt F G & B G, & F G eſt ad B G ut K T ad K H ex naturâ circuli & Ellipſeos.

(i) * *Sinuſque hujus anguli in octantibus eſt ad Radium ut KH ad TK+TH.* Ex Principiis Trigonometricis, eſt ſinus hujus anguli F T A qui eſt æquatio nodorum Lunæ ad ſinum anguli T F G, qui in hoc caſu eſt 45gr. (cujus ergo ſinus eſt $TA\sqrt{\frac{1}{2}}$) ut eſt F B ad B T, ſive omnes terminos quadrando; eſt quad. ſinus Æquationis ad $\frac{TA^2}{2}$ ut FB^2 ad BT^2 ſive tollendo fractionem, eſt quadr. ſinus Æquationis quæſitæ ad TA^2 ut FB^2 ad $2\,BT^2$, ſed $BT^2 = BG^2 + TG^2$ & in octantibus eſt $TG = FG$ ſive $BG + BF$ cujus quad. eſt $BG^2 + 2\,BG \times BF + BF^2$ hinc $BT^2 = 2\,BG^2 + 2\,BG \times DF + BF^2$ & $2\,BT^2 = 4\,BG^2 + 4\,BG \times BF + 2\,BF^2$, cujus Radix quadrata (negligendo BF^2) eſt

„ad radium ut KH ad $TK+TH$. Sinus autem hujus æqua- „tionis in loco (k) quovis alio A est ad sinum maximum, ut „sinus summæ angulorum $FTN+ATN$ ad radium: hoc est „ferè ut sinus duplæ distantiæ solis à loco nodi medio (nempe „$2FTN$) ad radium.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIII. PROBL. XIV.



Scholium:.

„Si motus nodorum mediocris horarius in quadraturis sit „$16''. 16'''. 37^{iv}. 42^{v}$. hoc est in anno toto sidereo $39^{o}. 38'$. „$7''$.

est $2BG+BF=FG+BG$: Ergo tandem cum sit quad. sinus Æquationis quæsitæ ad TA^2 ut est FB^2 ad $2BT^2$; Radices quadratas omnium terminorum sumendo est sinus Æquationis ad TA sive ad Radium ut est FB ad $FG+BG$, sed est BF ad $FG+BG$ ut KH ad $TK+TH$, hinc tandem, sinus Æquationis maximæ est ad radium ut KH ad $TK+TH$. 117.

(k) * *Sinus autem Æquationis in loco quovis alio &c.* Ut hoc commode demonstretur hoc Lemma adhibendum est.

De Mundi Systemate. „7''. 50'''. erit ([l]) TH ad TK in subduplicatâ ratione nu-„meri 9,082764 ad numerum 10,0827646, hoc est ut „18,

217. In circulo quovis N K n M sumatur arcus NF ejusque sinus FG, ex centro ducatur recta TBA quæ secet hunc sinum in B, dico quod sinus summæ angulorum FTN, ATN erit ad TG Cosinum anguli assumpti FTN, ut summa linearum FG, BG, ad lineam BT.

Ex alterâ parte puncti N sumatur arcus NV = NA, ducatur TV & producatur FG quæ occurrat radio TV in X, ductoque radio FT eoque producto si opus est, ducantur, in ipsum perpendiculares Xx, Vu.

Liquet ex constructione, lineam BT esse æqualem lineæ XT, lineam GX esse æqualem lineæ BG, ideoque totam FX esse æqualem summæ linearum FG, BG; liquet pariter lineam Vu esse sinum arcus FV qui est summa arcuum NF & NV sive NA, & propter Triangula FXx, FTG similia, ob angulum F communem & rectos x & G est TF ad TG ut FX ad Xx, & propter Triangula similia uVT, xXT esse Vu ad TV sive TF ut Xx ad TX sive BT; unde ex perturbato ordine fit Vu ad TG ut FX sive FG+BG ad BT; Est itaque $BT = \frac{(FG+BG)TG}{Vu}$.

Ex hoc Lemmate facile probatur sinum æquationis in quovis loco esse ad sinum æquationis maximæ ut sinus summæ angulorum FTN + ATN ad radium; nam ex Principiis Trigonometricis, est sinus Æquationis quæsitæ sive sinus anguli FTB ad sinum anguli F (qui est TG Cosinus nempe anguli FTN) ut est BF ad BT hoc est, ut est BF ad $\frac{(FG+BG)TG}{Vu}$ per Lemma; ducatur uterque consequens in $\frac{Vu}{TG}$ fiet sinus æquationis quæsitæ ad Vu qui est sinus summæ angulorum FTN+ATN ut BF ad FG+BG, sed ex notâ præcedenti est BF ad BF+BG ut KH ad TK+TH, & est KH ad TK+TH ut sinus æquationis maximæ ad Radium, hinc tandem, sinus æquationis cujusvis ad sinum summæ angulorum FTN+ATN, ut sinus æquationis maximæ ad Radium.

(l) * *Erit TH ad TK in subduplicatâ*

„18,6524761 ad 19,6524761. Et propterea TH ad HK ut „18,6524761 ad 1. hoc est ut motus solis in anno sidereo ad „motum nodi medium 19°. 18′, 1″. 23‴$\frac{2}{3}$.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIII. PROBL. XIV.

„At si motus medius nodorum Lunæ in 20 annis Julianis „sit 360°. 50′. 15″. sicut ex observationibus in theoriâ lunæ „adhibitis deducitur: motus medius nodorum in anno sidereo „erit 19°. 20′. 31″. 58‴. Et TH erit ad HK ut 360gr. „ad 19°. 20′. 31″. 58‴. hoc est ut 18,61214 ad 1. unde „motus mediocris horarius nodorum in quadraturis evadet „16″. 18‴. 48^{iv}. Et æquatio nodorum maxima in octanti„bus 1°. 29′ 57″.

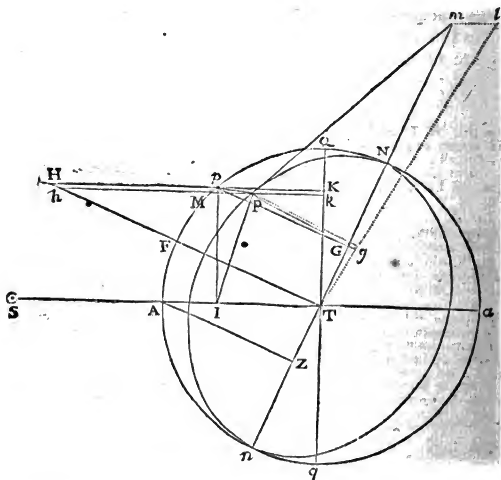
ratione &c. Est TS ad SK ut motus Solis ad motum horarium nodi in quadraturis, hoc est, ut 360. ad 39gr. 38′. 7″. 50‴. sive ut 9.0827646 ad 1, ergo componendo est TS ad TK ut 9.0827646 ad 10.0827646. ergo TH media proportionalis inter TS & TK, *est ad TK in subduplicatâ ratione &c.* Reliqua hujus scholii similibus calculis deducuntur, qui faciliores sunt quàm ut plenius explicentur. 117.

De Mundi Systemate.

PROPOSITIO XXXIV. PROBLEMA XV.

Invenire variationem horariam inclinationis orbis lunaris ad planum eclipticæ.

Designent *A* & *a* syzygias; *Q* & *q* quadraturas; *N* & *n* nodos; *P* locum lunæ in orbe suo; *p* vestigium loci illius in



plano eclipticæ, & *mTl* motum momentaneum nodorum ut supra. Et si ad lineam *Tm* demittatur perpendiculum *PG*, *pG* & producatur ea donec occurrat *Tl* in *g*, & jungatur etiam *Pg*: erit angulus *PGp* inclinatio orbis lunaris ad planum eclipticæ,

ticæ, ubi luna versatur in g; & angulus Pgp inclinatio ejusdem post momentum temporis completum; ideoque angulus GPg variatio momentanea inclinationis. Est (m) autem hic angulus GPg ad angulum GTg ut TG ad PG & Pp ad PG conjunctim. Et propterea si pro momento temporis substituatur hora; cum angulus GTg (per prop. xxx.) sit ad angulum $33''. 10'''. 33^{iv}.$ ut $IT \times PG \times AZ$ ad AT *cub.* erit angulus GPg (seu inclinationis horariæ variatio) ad angulum $33''. 10'''. 3^{vi}.$ ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.* *Q E I.*

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIV. PROBL. XV.

Hæc ita se habent ex hypothesi quod luna in orbe circulari uniformiter gyratur. Quod si orbis ille ellipticus sit, motus mediocris nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti supra expositum est. (n) Et in eâdem ratione minuetur etiam inclinationis variatio.

Co-

(m) *Est autem angulus GPg ad angulum.* In Triangulo PGg, sinus anguli GPg est ad lineam Gg, ut sinus anguli PGg ad Pg (sive PG, nam Pg & PG quam minimum differunt) si verò PG assumatur pro radio, sinus anguli PGg est Pp, ergo sinus anguli GPg est ad Gg ut Pp ad PG. 117

In Triangulo GTg, est Gg ad sinum anguli GTg ut Tg sive TG ipsi proximè æqualis ad sinum Anguli Recti in G qui est radius pro quo PG hic assumitur ergo ex æquo, sinus Anguli GPg est ad sinum anguli GTg ut TG ad PG & Pp ad PG conjunctim, & quia sinus parvorum Angulorum sunt ut ipsi Anguli, est *angulus GPg ad angulum* &c.

(n) * *Et in eâdem ratione minuetur etiam inclinationis variatio.* Ex propositionis demonstratione liquet quod variatio inclinationis est ad motum nodorum ut Pp ad PG (sive ut sinus inclinationis plani ad Radium) & ut PG ad TG; sumatur Π in Ellipsi ad eamdem distantiam à nodo ac P in circulo, ratio PG ad TG eadem erit ac ratio ΠΓ ad TΓ, per construction. cum autem hic agatur de quantitate mediocri sumatur eamdem esse plani inclinationem sive agatur de Plano Elliptico sive de plano circulari; Ergo variatio Inclinationis erit semper ut motus nodorum sive agatur de plano Elliptico sive de plano circulari; sed motus nodorum mediocris in orbe circulari est ad ejus motum in orbe Elliptico ut axis major ad minorem per Cor. Prop. XXXI.

In eâdem etiam ratione minuetur inclinationis variatio.

DE MUNDI SYSTEMATE.

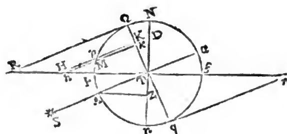
Corol. 1. Si ad Nn erigatur perpendiculum TF, sitque pM motus horarius lunæ in plano eclipticæ; & perpendicula pK, Mk in QT demissa & utrinque producta occurrant TF in H & h: (o) erit IT ad AT ut Kk ad Mp, & TG ad Hp ut TZ ad AT, ideoque $IT \times TG$ æquale $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, hoc

117. (o) * *Erit IT ad AT ut Kk ad Mp.* Est, ex naturâ circuli, ordinata pK cui æqualis est IT ad Radium AT, ut fluxio abcissæ Kk ad fluxionem arcus Mp, & *TG ad Hp ut TZ ad AT* producatur HpK ita ut occurrat lineæ Nn in D, propter Parallelas, HD, AT & HT, AZ per constructionem, est DT ad HD ut TZ ad AT, est pariter eamdem ob rationem DG ad pD ut TZ ad AT, quare sumendo differentiam terminorum duarum priorum rationum utriusque rationis est *TG ad Hp ut TZ ad AT.*

est, æquale areæ $Hp\,Mh$ ductæ in rationem $\frac{TZ}{Mp}$: & propterea inclinationis variatio horaria ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}$. ut $Hp\,Mh$ ducta in $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.*

Corol. 2. Ideoque si terra & nodi singulis horis completis retraherentur à locis suis novis, & in loca priora in instanti semper reducerentur, ut situs eorum, per mensem integrum periodicum, datus maneret; tota inclinationis variatio tempore mensis illius foret ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}$., ut (p) aggregatum omnium arearum $Hp\,Mh$, in revolutione puncti p genitarum, & sub signis propriis + & − conjunctarum, ductum in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ *cub.* (q) id est, ut circulus totus $QAqa$ ductus

(p) * *Ut aggregatum omnium arearum Hp Mh sub signis propriis conjunctarum* scilicet prout linea M H sumitur in eamdem partem ac linea M K aut in partem oppositam; priore casu area H p M h signo affirmativo est afficienda, posteriore negativo.



(q) * *Id est, ut circulus totus QAqa &c.* Liquet ex ipsâ constructione quod dum punctum p movetur ab F usque ad q, areæ H p M H constituunt aream positivam F A n q r f T F, dum ex q ad f procedit areæ H p M h constituunt aream negativam q r f, quæ ex priori detractâ relinquit semicirculum F n f.

Quod dum punctum p procedit ex f ad Q areæ H p M h efficiunt aream positivam f a N Q R F T f & dum ex Q ad F procedit, efficiunt aream negativam Q R F quæ ex priori detractâ relinquit semicirculum f N F.

Itaque omnes areæ H p M h sub signis propriis conjunctæ efficiunt circulum totum Q A q a.

Cæterum observandum Variationem inclina-

De Mundi Systemate. ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ *cub.* (r) hoc est, ut circumferentia $QAqa$ ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\, Mp \times AT$ *quad.*

Corol. 3. Proinde in dato nodorum situ, variatio mediocris horaria, ex quâ per mensem uniformiter continuata variatio illa menstrua generari posset, est ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}$. ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\, ATq$ sive ut $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2} AT}$ ad $PG \times 4\, AT$, id est (cum Pp sit ad PG ut sinus inclinationis prædictæ ad radium, & $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2} AT}$ sit ad $4\, AT$ ut (s) sinus duplicati anguli ATn ad radium quadruplicatum) ut inclinationis ejusdem sinus ductus in sinum duplicatæ distantiæ nodorum à sole, ad quadruplum quadratum radii.

Corol.

117. clinationis esse positivam aut negativam, hoc est crescere aut decrescere secundum signa quantitatis A Z × T Z de quibus in Coroll. proximo dicemus.

(r) * *Ut circulus totus $QAqa$ ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ cub.* Si in hac ratione loco circuli Q A q a, ponatur ejus valor qui est circumferentia Q A q a ductâ in dimidium radii seu in $\frac{AT}{2}$, hæc ratio licet, circumferentia $QAqa \times \frac{AT}{2} \times AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ cub. Multiplicetur uterque terminus per 2 & dividatur per A T, non mutabitur ratio & fiet *ut circumferentia $QAqa$ ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ quad.*

(s) *Ut sinus duplicati anguli.* Ex Trigonometriæ elementis sinus duplicati anguli A T n sive A T N, cujus sinus est AZ & Cosinus T Z, est $\frac{2\, AZ \times TZ}{AT}$ sive $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2} AT}$.

Quando autem duplum anguli A T N excedit semicirculum sive quando angulus A T N est rectus, signum sinus dupli anguli A T N, fit negativum ex positivo; quando angulus A T N excedit 180gr. signum sinus ejus dupli iterum fit positivus, sicque deinceps.

Positivum autem signum designat angulum Planum per variationem minui, negativum verò signum eum angulum augeri significat, ita ut angulus minuatur dum nodus N recedit ex conjunctione A ad quadraturam ultimam Q, crescit verò dum nodus à quadraturâ Q ad oppositionem a movetur, iterum minuitur dum ab oppositione ad primam quadraturam q tendit, & denique augetur dum à quadraturâ q ad conjunctionem A redit; ita ut Inclinationis angulus sit minimus cum nodi in quadraturis Q & q versantur, maximus

Corol. 4. Quoniam inclinationis horariæ variatio, ubi nodi in

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIV. PROBL. XV.

ximus verò cum nodi sunt in syzygiis A & a; Quæ Lex ab Astronomis est observata sed paulò accuratius ostendendum id sequi reverâ ex hâc Propositione.

Sit nodus N ubivis inter conjunctionem A & ultimam quadraturam Q, ductâque FTf perpendiculari in lineam nodorum, dum Luna movebitur ex N ad F inclinationis variatio designabitur per aream NAFTh, cumque Luna tum versetur inter Nodum & remotiorem quadraturam motus nodi erit regressivus, ideoque cum linea ♈T fiat semper remotior à Lunâ quam linea NT (punctum ♈ quod hic exaratum non est designat novum locum in quem Nodus adscendens Lunæ movetur) inclinationis Lunæ angulus ad lineam T♈ relatus minor erit quam si ad TN referretur, area ergo NAFTh designabit imminutionem anguli inclinat. dum pergit Luna ab N ad F.

Dum Luna movetur ab F ad q pergit quidem ut prius nodus in antecedentia, sed producta linea ♈T, ejus productio erit vicinior Lunæ in area Fq existenti quam productio lineæ NT, ideoque inclinationis Lunæ angulus ad productionem lineæ T♈ relatus major erit quam si ad lineam Tn referretur, sed hoc in casu area FRq designat inclinationis variationem, ergo area FAq designat incrementum anguli inclinationis.

Dum Luna ab n ad f movetur, motus nodi fit regressivus & ex N in ♈ migrat, & lineæ ♈T productio remotior est à Lunâ in areâ nf versante quam productio lineæ NT ideo angulus inclinationis minor erit quam si ad lineam Tn referretur ea verò variationis mutatio designatur per aream Hnaf quæ ideo imminutionem anguli inclinationis designat.

Ab f ad Q crescit quidem inclinationis angulus, quia refertur ad lineam T♈, 117

totum itaque illud variationis incrementum designatur per aream Qfr sed à Q ad n, cum motus nodi fiat progressivus, referaturque inclinationis angulus ad Tl, minuitur is angulus totaque imminutio designatur per aream NhrQ.

Resumantur hæc omnia, deprehenditur imminutionem anguli inclinationis exprimi per areas NAFh, qnHR, Hnaf & NhrQ, quarum prima & ultima efficiunt QAFTr, duæ mediæ aream qafFR.

Totum verò incrementum anguli inclinationis exprimitur per areas FRq & Qfr, quarum hæc detracta ex area QAFTr relinquit semicirculum QAFf, prior detracta ex areæ qafTR relinquit semicirculum qafF ideoque circulus totus QAqa designat imminutionem anguli inclinationis cum nodus versatur in quovis puncto N quadrantis AQ.

Si hæc ratiocinia applicentur ad figuram Newtonianam ubi nodus N est in quadrante Qa, ex iis deprehendetur circulum QAqa designare incrementum anguli inclinationis.

Si nodus in quadrante aq versetur, omnia eodem modo procedent ac in primo casu, mutatis solummodo litteris majusculis in minores, ideoque etiam ostendetur circulum QAqa imminutionem anguli inclinationis designare; & pariter ubi nodus erit in quadrante qA casus hic ad secundum referri poterit, minuitur ergo inclinatio dum Nodus procedit ab A ad Q, tumque est minima, siquidem inde crescere incipit usque ad a, ubi est maxima, siquidem inde decrescit usque ad q, ubi iterum est minima indeque crescit usque ad A ubi iterum maxima est.

DE MUNDI SYSTEMATE.

in quadraturis versantur, est (per hanc propositionem) ad angulum $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.* id (t) est, ut $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2AT$; hoc est, ut sinus duplicatæ distantiæ lunæ à quadraturis ductis in $\frac{Pp}{PG}$ ad radium duplicatum: summa omnium variationum horariarum, quo tempore luna in hoc situ nodorum transit à quadraturâ ad syzygiam (id est, spatio horarum $177\frac{1}{6}$,) erit ad summam totidem angulorum $33''. 10'''. 33^{iv}$., seu $5878''$., ut summa omnium sinuum duplicatæ distantiæ lunæ à quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad summam totidem diametrorum; hoc (u) est, ut diameter ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad circumferentiam; id est, si inclinatio sit 5^{gr}.

1',

121. (t) * *Id est.* Ubi nodi versantur in quadraturis, recta N n coincidit cum Q q, ideóque perpendicularis A E, abit in radium A T. Quarè $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ est ad A T cub. ut $IT \times AT \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad A T cub. Sivè ut $IT \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT^2 ac dividendo per $\frac{1}{2}$ A T, ut $IT \times \frac{TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad 2 A T.

(u) 121. * *Hoc est ut diameter.* Sit T I vel $pK = y$, radius $QT = 1$, erit $TK = \sqrt{1-yy}$, ex naturâ circuli, & $TK = TG$ quia in hoc casu recta n N, coincidit cum Q q, cum nempe nodi versentur in quadraturis; ac proinde sinus duplicatæ distantiæ Lunæ à quadraturis, id est $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} = 2y \times \sqrt{1-y^2}$ Jam ut obtineatur elementum areæ quæ componitur ex omnibus sinubus distantiæ duplicatæ, multiplicari debet sinus variabilis $2y \times \sqrt{1-y^2}$, per elementum arcûs circuli, hoc est, per $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$, undè habetur elementum areæ quæsitæ $= 2ydy$, sumptisque fluentibus, prodit area tota $= y^2$, factâ autem $y = 1$, erit area illa ubi Luna pergit à quadraturâ ad syzigiam, æqualis quadrato radii. Nunc verò ut habeatur summa totidem diametrorum multiplicandus est quadrans circuli per totam diametrum. Hinc si radius dicatur r peripheria p, erit summa omnium sinuum duplicatæ distantiæ Lunæ à quadraturis, quo tempore Luna transit à quadraturâ ad syzigiam ad summam totidem diametrorum ut r^2 ad $\frac{p \times 2r}{4}$, sivè ut $2r$ ad p, hoc est, ut diameter ad circumferentiam.

Si

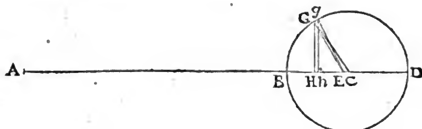
1', ut $7 \times \frac{874}{1000000}$ ad 22, seu 278 ad 10000. Proindeque variatio tota, ex summâ omnium horariarum variationum tempore prædicto conflata, est 163'', seu 2'. 43''.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA XVI.

Dato tempore invenire inclinationem orbis lunaris ad planum eclipticæ.

Sit *AD* sinus inclinationis maximæ, & *AB* sinus inclinationis minimæ. Bisecetur *BD* in *C*, & centro *C*, intervallo *BC* describatur circulus *BGD*. In *AC* capiatur *CE* in eâ



ratione ad *EB* quam *EB* habet ad 2 *BA*: & si dato tempore constituatur angulus *AEG* æqualis duplicatæ distantiæ nodorum à quadraturis, & ad *AD* demittatur perpendiculum *GH*: erit *AH* sinus inclinationis quæsitæ.

Nam

Si autem inclinatio sit 5°. 1'. Erit sinus P p, huic inclinationi respondens, ad radium P G, ut 874 ad 10000 (ex vulgaribus sinuum tabulis). Est autem diameter ad peripheriam ut 7. ad 22, quare summa omnium sinuum duplicatæ distantiæ Lunæ à quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ est ad summam totidem diametrorum ut $7 \times \frac{874}{10000}$ ad 22. Facile autem percipitur quod nodo existente in quadraturâ dum Luna à quadraturâ ad conjunctionem vadit, angulus inclinationis minuitur, quod tantumdem augetur, dum a conjunctione ad primam quadraturam movetur, minuitur rursum dum ad opositionem vadit augeturque iterum dum ad ultimam quadraturam redit, ita compensatis incrementis & decrementis ut nulla sensibilis supersit inclinationis mutatio, quâtenus scilicet nodus reverâ immotus in puncto Q supponitur. 121.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Nam GEq æquale eſt $GHq + HEq = BHD$ (x) $+ HEq = HBD + HEq - BHq = HBD + BEq - 2BH \times BE = BEq + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH = 2EC \times AH$. Ideoque cum $2EC$ detur, eſt GEq ut AH. Deſignet jam AEg duplicatam diſtantiam nodorum à quadraturis poſt datum aliquod momentum temporis completum, & arcus Gg ob datum angulum GEg erit ut diſtantia GE. Eſt (y) autem Hh ad Gg ut GH ad GC, & propterea Hh eſt ut contentum $GH \times Gg$, ſeu $GH \times GE$; id eſt ut $\frac{GH}{GE} \times GEq$ ſeu $\frac{GH}{GE} \times AH$, id eſt, ut AH & ſinus anguli AEG conjunctim. Igitur ſi AH in caſu aliquo ſit ſinus inclinationis, augebitur ea iiſdem incrementis cum ſinu inclinationis, per Corol. 3. Propoſitionis ſuperioris, & propterea ſinui illi æqualis ſemper manebit. Sed (z) AH, ubi punctum G incidit in punctum alterutrum B vel D, huic ſinui æqualis eſt, & propterea eidem ſemper æqualis manet. *Q. E. D.*

In hâc demonſtratione ſuppoſui angulum BEG, qui eſt duplicata diſtantia nodorum à quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum BEG rectum eſſe, & in hoc caſu Gg eſſe augmentum horarium duplæ diſtantiæ nodorum & ſolis ab invicem, & inclinationis variatio horaria in eodem caſu (per Corol. 3. Prop. noviſſimæ) erit ad $33''. 10'''. 33^{iv}.$ ut (a) contentum ſub inclinationis ſinu AH & ſinu anguli recti BEG, qui eſt duplicata diſtantia nodorum à ſole, ad quadruplum quadratum radii; id eſt, ut mediocris inclinationis ſinus AH ad radium.

121. (x) * $= BHD + HEq$. (Prop. 5. Lib. 2. elem.) $= HBD + HEq - BHq$ (per prop. 3. lib. 2. elem.) $= HBD + BEq - 2BH \times BE$ (Prop. 7. ejuſdem Lib.) $= BEq + 2EC \times BH$ (ob $BD = 2EC + 2BE$). Eſt autem (per conſtr.) $EB^2 = 2EC \times BA$; quare $BEq + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH$.

(y) * *Eſt autem Hh ad Gg.* (Per naturam circuli).

(z) *Sed AH.* (Per conſtr.)

(a) * *Ut contentum ſub inclinationis ſinu AH, & ſinu anguli recti BEG*, hoc eſt, ut contentum ſub mediocris inclinationis ſinu AH (quia in hoc caſu $AH = AC$) & radio *ad quadruplum quadratum radii; id eſt, ut mediocris inclinationis ſinus AH, ad radium quadruplicatum.*

radium quadruplicatum; hoc eſt (cum inclinatio illa mediocris ſit quaſi $5^{gr}. 8'\frac{1}{2}$) ut ejus ſinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, ſive ut 224 ad 10000. Eſt autem variatio tota, ſinuum differentiæ *B D* reſpondens, ad variationem illam horariam ut ([b]) diameter *BD* ad arcum *Gg*; id eſt, ut diameter *BD* ad ſemicircumferentiam *B G D* & tempus horarum $2079\frac{7}{10}$



quo nodus pergit à quadraturis ad ſyzygias, ad horam unam conjunctim; hoc eſt, ut 7 ad 11 & $2079\frac{7}{10}$ ad 1. Quare ſi rationes omnes conjungantur, fiet variatio tota *B D* ad $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ ad 110000, id eſt, ut 29645 ad 1000, & inde variatio illa *B D* prodibit $16'$, $23''\frac{1}{2}$.

Hæc eſt inclinationis variatio maxima quatenus locus lunæ in orbe ſuo non conſideratur. Nam inclinatio, ſi nodi in ſyzygiis verſantur, nil ([c]) mutatur ex vario ſitu lunæ. At ſi nodi in quadraturis conſiſtunt, inclinatio minor eſt ubi luna verſatur

(b) * *Ut Diameter B D ad arcum Gg.* Nam, in hâc conſtructione, variatio tota ſinuum differentiæ B D reſpondens per Diametrum B D exprimitur, & H h eſt incrementum ſinus inclinationis tempore quod per G g deſignatur, ſive horæ tempore; ſed ubi punctum H cadit in centro C, & punctum G in medio ſemicirculi, tunc eſt G g = H h; Ergo, eſt Diameter B D ad arcum G g ut variatio tota ad variationem horariam in Octantibus; ſed ut ſunt $2079\frac{7}{10}$ horæ quæ effluunt dum nodus pergit à quadraturâ ad ſyzygiam ad unam horam, ita ſemicircumferentia B G D ad G g, eſt ergo $Gg = \frac{BGD \times 1^h}{2079\frac{7}{10}{}^h}$, ideoque variatio tota eſt ad variationem horariam in octantibus ut BD ad $\frac{BGD \times 1^h}{2079\frac{7}{10}{}^h}$ ſive ut B D ad BGD & $2079\frac{7}{10}{}^h$. ad 1^h. conjunctim. 121;

(c) * *Nil mutatur ex vario ſitu Lunæ;* Nam ex demonſtratione Prop. XXXIV. inclinationis variatio horaria eſt ad angulum $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.* ſed nodis verſantibus in ſyzygiis fit $AZ = 0$ quare quantitas

DE MUNDI SYSTEMATE.

ſatur in ſyzygiis, quam ubi ea verſatur in quadraturis, exceſſu $2'. 43''$; uti in propoſitionis ſuperioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus exceſſus dimidio $1'. 21''\frac{1}{2}$ variatio tota mediocris BD in quadraturis lunaribus diminuta fit $15'. 2''$, in ipſius autem ſyzygiis aucta fit $17'. 43''$. Si luna igitur in ſyzygiis conſtituatur, variatio tota in tranſitu nodorum à quadraturis ad ſyzygias erit $17'. 45''$: ideoque ſi inclinatio, ubi nodi in ſyzygiis verſantur, ſit $5^{gr}. 17'. 20''$.; eadem, ubi nodi ſunt in quadraturis, & luna in ſyzygiis, erit $4^{gr}. 59'. 35''$. Atque hæc ita ſe habere confirmatur ex obſervationibus.

Si jam deſideretur orbis inclinatio illa, ubi luna (d) in ſyzygiis & nodi ubivis verſantur; fiat AB ad AD ut ſinus graduum $4. 59'. 35''$ ad ſinum graduum $5. 17. 20''$, & capiatur angulus AEG æqualis duplicatæ diſtantiæ nodorum à quadraturis; & erit AH ſinus inclinationis quæſitæ. (e) Huic orbis inclinationi æqualis eſt ejuſdem inclinatio, ubi luna diſtat 90^{gr}. à

121. $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{FG}$ fit etiam o, evaneſcit itaque hoc in caſu horaria variatio, ideoque in vario ſitu Lunæ non mutatur ejus orbitæ inclinatio. Et quidem idem citra calculum patet ex ipſa rei naturâ, nam verſantibus in ſyzygiis, ſive ſole exiſtente in lineâ nodorum, ſol eſt in eo plano in quo jacet linea nodorum, ſed linea nodorum eſt in plano orbitæ Lunaris, ergo ſol in ipſâ orbitâ Lunari productâ poſitus cenſeri poteſt, ac per conſequens qualiſcumque ſit ejus actio in Lunam, ipſam ex plano utrique communi neutiquam dimovebit.

(d) * *Ubi Luna in ſyzygiis & nodi ubivis verſantur.* Nam dum Luna ab unâ ſyzygiâ ad eamdem ſyzygiam redit, tota variatio menſtrua eſt ad $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{FG}$ ad $2ATq$, ſive ut ex Cor. 3°. Prop. præcedentis conſtat ut Inclinationis ſinus ductus in ſinum duplicatæ diſtantiæ nodi à Sole ad quadruplum quadratum radii, ſed per hujus Probl. conſtructionem in ea ratione eſt AH, ſi modo AB ſit ut ſinus minimæ inclinationis & AD ſinus maximæ, ſed $4^{gr}. 59'. 35''$ eſt minimus inclinationis Angulus ubi Luna eſt in ſyzygiis & $5^{gr}. 17'. 20''$ eſt maximus. *Ergo fiat AB ad AD ut ſinus graduum* $4^{gr}. 59'. 35''$ &c.

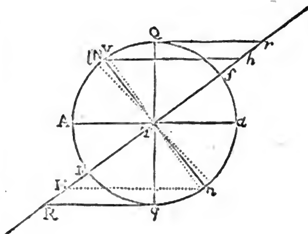
(e) *Huic orbis inclinationi æqualis eſt ejuſdem inclinatio ubi Luna diſtat.* 90^{gr}. *a nodis.* Minima inclinatio ubi Luna diſtat 90^{gr}. à nodis eſt ubi nodi ſunt in quadraturis, nonageſimus autem à nodis gradus incidit in ipſam ſyzygiam itaque minima inclinatio eadem eſt ac in præcedenti caſu; maxima vero inclinatio eſt cum nodi ſunt in ipſis ſyzygiis, & nonageſimus à nodis gradus tunc quidem incidit in quadraturas, ſed tunc inclinatio nihil mutatur ex vario ſitu Lunæ, itaque eadem eſt ſive Luna in ſyzygiis ſive in quadraturis verſetur, eadem ergo eſt iterum maxima inclinatio ac in caſu præcedenti, ideoque in hoc caſu AB & AD eadem aſſumenda ſunt ac in caſu præcedenti: Reliquum ratiocinium hic etiam adplicatur, nam quamvis tempus reditus Lunæ ad nonageſimum à nodo gradum brevior ſit tempore ejus reditus ad ſyzygiam ſive

à nodis. In aliis lunæ locis inæqualitas menstrua, quam inclinationis variatio admittit, in (f) calculo latitudinis lunæ compensatur, & quodammodo tollitur per inæqualitatem menstruam motus nodorum (ut supra diximus) ideoque in calculo latitudinis illius negligi potest.

Scho-

sive mense synodico, siquidem mense Periodico etiam brevior est, tamen hic casus ad fictionem Corollarii secundi magis accedit, in quo nempe supponitur nodum toto mense sensibilem viam non esse emensum, quod quidem accuratius dicetur si assumatur reditus Lunæ ad eumdem situm respectu nodi; hic ergo eadem constructio ac prior potiori jure erit adhibenda.

(f) * *In calculo latitudinis compensatur & quodammodo tollitur per inæqualitatem menstruam motus nodorum.* Calculus latitudinis fit, positâ inclinatione orbitæ Lunaris ad planum Eclipticæ, & assumptâ distantiâ Lunæ à nodo, hinc latitudo Lunæ obtinetur, quæ crescit à nodo ad gradum à nodo nonagesimum, inde decrescit accedendo ad alterum nodum &c. Procedat ergo Luna à nodo N ad punctum F 90gr. à nodo distitum, motus medius nodi est major motu vero, toto eo intervallo, ut superius (ad Prop. XXXII.) ostensum est, ergo assumpta mediocri distantia à nodo quæ verâ major est & mediocri inclinatione quæ convenit illi mensi, latitudo major invenietur quam debuisset, sed quoniam in casu istius figuræ minuitur Angulus inclinationis dum Luna movetur ab N in F, & is angulus ad mediocrem imminutionem tunc pervenit cum Luna est in F circiter, quia area NFh est ferè semicirculo æqualis, hinc inclinatio orbitæ angulum majorem efficit quam is qui per inclinationem mediocrem supponitur, unde latitudo vera major evadit quam ea quæ propter mediocrem inclinationem orbitæ obtinetur: hinc ex eo quod nodi motus mediocris loco motus veri assumitur invenitur latitudo major vera, sed ex eo quod inclinatio mediocris assumitur loco veræ, invenitur latitudo minor vera; inæqualitates itaque menstruæ quam variatio inclinationis & motus nodorum admittunt sese mutuo compensant in calculo latitudinis. Cæteri casus eamdem compensationem suppeditant, v. gr dum Luna ex F in q movetur motus verus nodi est minor motu vero, hinc Luna est reverâ remotior à nodo quam statuitur per motum medium nodi, ideoque latitudo major supponitur quam est (quia in secundo quadrante à nodo quò proprior est Luna à nodo ascendente N, ideoque eo remotior à des-



cendente n, eò ejus latitudo est major) sed cum orbita Lunæ habuerit in F inclinationem mediocrem augetur is Angulus dum movetur Luna ab F ad q, ideoque assumendo eam inclinationem mediocrem minor obtinetur latitudo quam reverâ est, ergo, propter inæqualitatem motus nodi latitudo quæ ex motu nodi mediocri habetur est major vera, latitudo quæ obtinetur ex inclinatione mediocri est minor verâ, compensantur ergo errores &c.

De Mundi Systemate.

Scholium. (g)

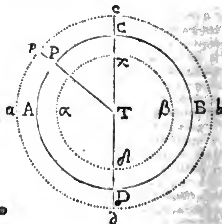
121. (g) * *Scholium.* Scholio hoc tradit Newtonus rationes quibus quædam ex Æquationibus Lunaribus ad calculos revocari possint, sed dolendum est illum non aperuisse vias quibus usus est ad eas concinnandas: defectum hunc utcumque reparare sumus conati & Methodos aperuimus quibus ex Gravitatis Theoria eas Æquationes deducere liceat, quantum fieri potuit iisdem usi sumus Methodis quas Newtono familiares fuisset constat & ad ejus solutiones proximè nos accessisse percipient Viri Docti cum paucis dumtaxat secundis ab ipsius numeris discedat calculus noster & ejus consequentiæ planæ sint similes iis quas ex suis Principiis Newtonus derivavit, utrum aliis Methodis res feliciùs absolvi potuerit, viderint Doctiores, speramus tamen hos calculos, ut legitimis Principiis nixos, Lectoribus nostris gratos fore, & forte eos juvare ut melius quid excogitent: Cæterum hoc Scholium in quinque Paragraphos commode distribui potest; In primo Newtonus Indicat calculum ejus Æquationis Lunæ quæ Æquatio Solaris prima dicitur: In secundo, tradit Æquationes Solares motus nodorum & Apogæi Lunæ; In Tertio illam Æquationis Solaris correctionem tradit quæ ab Excentricitate orbitæ Lunaris pendet; In quarto aliam adhuc correctionem Æquationis Solaris addit quæ nempe oritur ex inclinatione orbitæ Lunaris ad planum Eclipticæ, In quinto denique agit de Æquationibus motûs Lunæ & ejus Apogæi quæ pendent ex situ Apogæi Lunæ respectu Solis.

Ut autem hæc omnia & potissimum ea quæ Æquationem Solarem Lunæ spectant, & quæ primo, tertio & quarto Paragrapho à Newtono indicantur meliùs intelligantur, totum eum calculum qualis ex Theoriâ gravitatis instituendus nobis videbatur, uno tenore tradendum censuimus.

De Incremento motus medii Lunæ, & ejus Æquatione annuâ, ex Solis actione pendentibus, primum in Hypothesi orbem Lunæ esse circularem, postea in Hypothesi Orbem Lunæ esse Ellipticum. Denique in Orbe Lunari ad Eclipticam inclinato.

THEOR. I.

Corpus P revolvatur in circulo ADBC circa corpus T à quo retineatur per vim decrescentem secundum quadrata distan-



tiarum; accedat autem vis quædam constans quæ retrahat perpetuo corpus P à corpore centrali T, sed quæ sit exigua respectu vis ejus corporis T; Et describatur circulus a d b c in tali distantiâ ut residuum vis quam exerceret corpus T in eâ distantiâ (detractâ eâ vi extraneâ) sit ad vim quâ corpus P revolvebatur in circulo A D B C inversè ut cubi Radiorum Tp, TP; Dico, quod propter illam vim extraneam fiet ut corpus P circa circulum a d b c oscilletur, nunc citrà nunc ultra delatum, parum ab illo discedens, ita ut ejus motus assumi possit quasi fieret in eo circulo.

Nam fingatur eam vim extraneam non esse

esse constantem, sed talem ut, post discessum corporis P à circulo A D B C propter ejus vis extraneæ actionem, residuum vis quam exercet corpus T in distantia ad quam abit corpus P (detractâ eâ vi extraneâ) sit semper inversè ut cubi distantiarum, eveniet ut (per Prop. IX. Lib. I. Princip.) corpus P spiralem Logarithmicam describat, in quâ angulus curvæ cum radio ad curvam ducto semper manet idem; Verùm quoniam ab initio vis illa Extranea fuit constans, liquet quod priusquam corpus P circulum a d b c attigerit ea vis plus imminuebat vim centralem quam ut decrescat secundùm cubos distantiarum auctarum, ideoque quod anguli curvæ cum radio ad curvam ducto semper crescere debuerunt, sed incremento perpetuo minore quo magis accedit virium decrescentium ratio ad rationem inversam cubi distantiarum; Perveniet ergo corpus P ad circulum a d b c, & angulus curvæ cum Radio, quando P erit in circulo a d b c, erit recto major, quia semper crevit is Angulus à tempore quo corpus P circulum A D B C describebat in quo angulus radii cum curva rectus est; ideo P ultra circulum a d b c perget; cum autem P ultra circulum a d b c pervenerit, detractio vis constantis vim Centralem minus minuet quam secundum cubum distantiarum, itaque angulus curvæ cum radio minor fiet quam si Logarithmica spiralis describeretur & tandem reducetur ad angulum rectum ùltra circulmu a d b c, inde verò curva cum radio faciet angulum acutum, nam vis centralis illic major est quam ut circulus describi possit quod sic demonstrari potest; Areæ æqualibus temporibus descriptæ durante toto hoc corporis P motu sunt ubique æquales, quoniam vires ad centrum T constanter diriguntur (ex Hyp.), ideoque in eo loco ultra circulum a d b c in quo angulus curvæ cum radio fit rectus, arcus dato tempore descriptus foret ipsa basis areæ descriptæ cujus altitudo est distantia à Centro seu ipse radius, & is arcus debet esse ad arcum qui eodem tempore descriptus fuisset a corpore P si in circulo A D B C moveri perseverasset, nullaque vis extranea accessisset inverse ut radii; sagittæ autem eorum arcuum (quæ sunt semper ut quadrata arcuum divisa per Radios) forent inverse ut Cubi radiorum, sed vis centralis ultra circulum adbc, minus decrescit quam secundum cubum distantiarum, ergo sagitta arcus descripti quæ est ejus vis centralis effectus, major est sagittâ quæ foret secundum rationem inversam cubi distantiarum, ergo ea sagitta quæ per vim centralem producitur major est illa quæ obtineretur si circulus in eo loco describeretur; Ergo corpus P à Tangente magis discedit versus centrum quam si circulum describeret, ergo ejus via acutum angulum cum Radio efficere incipit, sicque accedit iterum ad circulum a d b c angulis curvæ cum radio perpetuo decrescentibus; Cum autem infra eum circulum transiverit angulus quem facit curva cum Radio iterum augetur donec is angulus rectus evadat, inde vero fiet obtusus quia vis centralis illic minor est quam ut corpus P in circulo moveri pergat, redit ergo corpus P versus circulum a d b c idque perpetuâ oscillatione, ut liquet ex collatione motûs quem haberet in Logarithmicâ spirali cum hoc motu: Sed quò minor est vis illa data quæ ex centrali detrahitur eò illæ alternæ oscillationes minus à circulo a d b c recedent, quare si vis ea exigua supponatur respectu vis Centralis corporis T, supponi etiam potest motum corporis P in circulo a d b c fiet. Q. E. D.

LIBRI TERTII. PROP. XXXV. PROBL. XVI. 128.

Cor. 1. Si vis illa extranea & constans perpetuo traheret corpus P versus T, iisdem argumentis ostenderetur quod si describatur circulus interior $\alpha\delta\beta\kappa$ in tali distantiâ à centro T, ut vis corporis T ad eam distantiam aucta per vim illam extraneam sit ad vim in circulo ADBC inversè ut cubi Radiorum circulorum ADBC, $\alpha\delta\beta\kappa$, corpus P hinc inde cis citrave circulum $\alpha\delta\beta\kappa$ oscillatur, & si ea vis extranea sit exigua censeri potest quod corpus P in eo ipso circulo $\alpha\delta\beta\kappa$ movebitur.

Cor. 2. Et si vis illa extranea constans non foret sed cresceret secundum aliquam dignitatem positivam distantiarum, iisdem omninò ratiociniis ostendi posset quod corpus P in circulo a d b c vel $\alpha\delta\beta\kappa$ movebitur, eveniet solummodo ut radius T p paulùm diversus sumi debeat ab eo qui inveniretur si vis ea extranea constans foret.

Schol. Aliis Methodis effectum illius vis extraneæ ad calculos revocari posse non negamus & quidem unam aut alteram Methodum ab hâc diversam eumdem in finem in sequentibus proponemus.

THE-

THEOR. II.

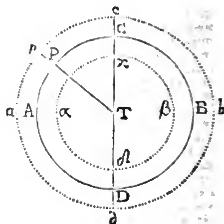
121. Positis iis quæ in primo Theoremate supponuntur, dicatur r Radius circuli ADBC, sit ρ radius circuli a d b c, vel $\alpha\delta\beta\varkappa$, sit p Radiorum r & ρ differentia; *Vis* corporis T in distantia r dicatur V & in eadem distantia vis extranea dicatur Y quæ crescat ut distantiæ à centro T & quæ positiva censeatur si distrahat corpus P à centro, negativa verò si illud attrahat ad centrum, dico quod Radius ρ erit semper æqualis quantitati $\frac{V-3Y}{V-4Y}r$, sive quantitati $r \times 1 + \frac{Y}{V} + \frac{4Y^2}{V^2} + \frac{16Y^3}{V^3}$ &c. & omissis terminis proptes exiguitatem quantitatis Y evanescentibus, est ille radius $\rho = Y \times 1 + \frac{Y}{V}$.

Nam vis corporis T in distantia ρ erit $\frac{rr}{\rho\rho}V$ vis extranea erit $\frac{\rho}{r}Y$ ex hypoth., ideoque vis quâ circulus adbc (vel $\alpha\delta\beta\varkappa$) describitur est $\frac{rr}{\rho\rho}V - \frac{\rho}{r}Y$, sed hæc vis debet esse ad vim V quâ circulus A B C D describitur inversè ut cubi Radiorum, sive ut $\frac{1}{\rho^3}$ ad $\frac{1}{r^3}$ (per Theor. præc.) ergo est $\frac{V}{\rho^3} = \frac{V}{r\rho^2} - \frac{Y\rho}{r^4}$, sive reductis terminis ad eumdem denominatorem est $\rho^4 Y = r^3 V \times \rho - r = \pm r^3 p V$. Loco ρ scribatur $r \pm p$ fiet $r^4 Y \pm 4r^3 p Y + 6r^2 p^2 Y \pm 4r p^3 Y + p^4 Y = \pm r^3 p V$, sive deletis terminis ubi p superat primum gradum, quoniam hæc quantitas exigua est fit $r^4 Y \pm 4r^3 p Y = \pm r^3 p V$, sive $\pm p V \mp 4pY = rY$, unde obtinetur $\pm p = \frac{rY}{V-4Y}$; ideoque ρ, quod est $r \pm p$, fit $\frac{V-3Y}{V-4Y}r$ qui valor in seriem redactus est $r \times 1 + \frac{Y}{V} + \frac{4Y^2}{V^2}$ &c. sive $r \times 1 + \frac{2Y}{V}$.

THEOR. III.

Dicatur M Tempus Periodicum corporis P in circulo A D B C, dico quod ejus Tempus Periodicum in circulo a d b c (vel $\alpha\delta\beta\varkappa$) erit $M \times 1 + \frac{2Y}{V}$.

Dem. Tempus Periodicum corporis P revolventis in circulo a d b c d (vel $\alpha\delta\beta\varkappa$) propter vim extraneam Y detractam vel ad-



ditam est ad Tempus Periodicum ejus corporis P cum revolvebatur in circulo A D B C citra omnem vim extraneam, ut est quadratum radii ρ ad quadratum radii r; Nam quia vis Y est semper directa ad centrum T, areæ manebunt temporibus proportionales quamcumque in viam flectatur corpus P, ergo, si tandem ejus via in circulum a d b c d (vel $\alpha\delta\beta\varkappa\delta$) mutetur, tempus quo describetur peripheria a d b c (vel $\alpha\delta\beta\varkappa$) erit ad tempus quo describebatur peripheria A D B C, ut tota area circuli a d b c (vel $\alpha\delta\beta\varkappa$) ad totam aream circuli A D B C ideoque ut quadrata radiorum ρ & r, sive (per Theor. præced.) ut $\frac{\overline{V-3Y}^2}{\overline{V-4Y}^2}rr$ ad rr, ideoque ut $\frac{\overline{V-3Y}^2}{\overline{V-4Y}^2}$ ad 1, sed hâc fractione in

seriem

seriem resoluta ea evadit $1+\frac{Y}{V}+\frac{4Y^2}{V^2}$ &c. &c. quæ series valde convergit propter exiguitatem istius fractionis $\frac{Y}{V}$ & illius quadratum est $1+\frac{2Y}{V}+\frac{9Y^2}{V^2}+\frac{40Y^3}{V^3}$ &c. Ergo ut 1 ad $1+\frac{2Y}{V}+$ &c. ita M ad $M\times 1+\frac{2Y}{V}+$ quod est tempus quo describetur Peripheria a d b c vel $\alpha\delta\beta\kappa$.

THEOR. IV.

Sit T terra, P Luna, ADBC circulus quem Luna describit; sit S T distantia mediocris Terræ à Sole quæ dicatur a; dicatur F vis Solis in terram in mediocri illa distantia, Sol supponatur immotus; distantia Lunæ à Terrâ P T dicatur r & ea non obstante actione Solis in Lunam eadem manere censeatur; Sit C P distantia Lunæ à quadraturâ proxima quæ dicatur u, sit ejus sinus y, sit ejus Cosinus z, Dico quod ea pars vis Solis quæ agit in Lunam secundùm directionem radii PT, est ubivis $\frac{F}{a}\times\frac{3yy}{r}-r$.

* LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

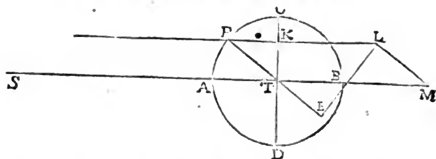
121.

Nam, secundùm constructionem Prop. LXVI. Lib. I. Princ., repræsentetur vis Solis quæ dicitur F per lineam ST vel SK, ea vis Solis quâ trahitur Luna in loco P repræsentetur per lineam SL, & hæc vis censeatur composita ex duabus SM & LM, quarum LM sit Parallela radio PT, cum autem linea SM sit æqualis lineæ $ST \pm TM$, & terra trahatur per vim ST non secus ac Luna, situs respectivus Lunæ ac Terræ per eam vim ST non mutatur, ideo sola ea pars vis SM quæ exprimitur per TM consideranda venit; Præterea ex naturâ gravitatis, est SK ad SL ut est $\frac{1}{SK^2}$ ad $\frac{1}{\overline{SK \mp PK}^2}$ sive ut est $SK^2 \mp 2SK\times PK + PK^2$ ad SK^2, aut omisso termino PK^2 ut $SK \mp 2PK$ ad SK, sive quoniam 2PK est exiguum respectu lineæ SK ut SK ad $SK \pm 2PK$ est ergo SL sive $SK \pm KL = SK \pm 2PK$ & $KL = 2PK$, cum autem linea PL sit proxime parallela lineæ SM, & ex constructione PT sit parallela LM, est TM proxime æqualis lineæ PL, & est $PL = PK + 2KL = 3PK$; Ex puncto L ducatur perpendiculum in radium PT (productum si necesse sit) & vis TM, seu vis ipsi æqualis PL resoluta intelligatur in vim PE & vim LE, vis LE radio PT sit perpendicularis ideoque vim centralem non afficit, vis PE secundùm directionem radii agat, sicque punctum P à centro T distrahat, altera autem pars quæ per LM repræsentatur secundum directionem radii agens punctum P versus centrum trahit; Ergo ea pars Solis quæ agit in Lunam secundum directionem radii PT est differentia virium PE & LM.

Jam vero ob Parallelas SL, SM & TP, LM est $LM = TP = r$, & cum PK sit proxime perpendicularis in lineam TC erit

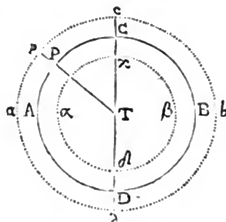
DE MUNDI SYSTEMATE.

1 2 1.



erit P K finus arcus P C qui finus dictus est y, ideoque $PL = 3PK = 3y$, cum autem Triangula P K T, P E L fint similia, est P T (r) ad P K (y) ut P L ($3y$) ad P E quod erit ergo $\frac{3yy}{r}$ & differentia virium P E & L M est $\frac{3yy}{r} - r$, quæ differentia positiva est cum $\frac{3yy}{r}$ fuperat r, tuncque Lunam à centro distrahit, negativa quando $\frac{3yy}{r}$ minus efficit quam r, tuncque Lunam ad centrum attrahit, cum ergo linea S T five a repræsentet totam vim Solis in terram, eaque vis dicatur F, & quantitas $\frac{3yy}{r} - r$ repræsentet eam partem vis Solis quæ in Lunam agit secundùm directionem P T, fiat ut a ad $\frac{2yy}{r} - r$, ita F ad eam partem vis Solis quæ afficit vim centralem Terræ in Lunam quæ idcircò erit $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$. Q. E. O.

Coroll. Si transferatur Luna in alium orbem a d b c, $\alpha\delta\beta\kappa$ cujus radius fit ρ, Dico, quod, manente distantia Lunæ à quadraturâ proximâ, ea pars vis Solis quæ afficit vim centralem Terræ in Lunam crescet ut illæ distantiæ ρ, eritque ideo $\frac{\rho}{r} \times \frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$, nam cum arcus p c ejusdem numeri graduum censeatur ac arcus P C finus eorum erunt ut radii, ideoque finus arcus p c erit $\frac{\rho}{r} y$, Demonstrabitur vero iisdem plane argumentis quibus in Theoremata usi sumus quod, si Luna in circulo a d b c vel $\alpha\delta\beta\kappa$ moveretur, ea pars vis Solis quæ secundum directionem radii P T exercetur erit $\frac{F}{a} \times 3\frac{\frac{\rho\rho y^2}{r^2}}{\rho} - \rho = \frac{F}{a} \times \frac{3\rho^2 y^2 - r^2\rho^2}{r^2\rho} = \frac{F}{a} \times \frac{3\rho y^2 - r^2\rho}{r^2} = \frac{\rho F}{r\,a} \times \frac{3y^2}{r} - r.$



THEOR. V.

Effectus actionis Solis in Lunam secundum directionem radii orbitæ Lunaris exercitæ intelligi potest, si concipiatur Lunam ex suâ orbita ADBC in aliam transferri, cujus singulæ particulæ quamminimæ fint portiones circulorum talium ut vis centralis Terræ in singulo circulo agens sublata vel addita vis Solis quæ in eo loco exerceretur sit ad vim centralem Terræ in circulo A D B C citra Solis actionem agentem, inversè ut cubus radii ejus circuli ad cubum radii circuli A D B C.

Etenim cum ea vis Solis per gradus infinite parvos crescat vel decrescat, sique pul-

nulla cum $\frac{3yy}{r} = r$, paulo post minima sit sicque gradatim crescat, si constans censeatur per tempusculum aliquod, brevissime transibit Luna in circulum adbc illi vi congruum per Theor. I., mox verò cum vis Solis crescat quantitate quam minima, ea vis censeatur constans per alterum tempusculum, transibit Luna ex circulo primæ vi congruo in alterum huic incremento consentaneum, sicque semper, ideoque in singulis particulis arcus CP Luna censeri potest delata in circulum vi Solis in eo puncto agenti congruum.

THEOR. VI.

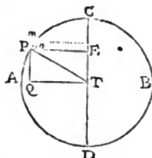
Manentibus quæ in Theor. IV. supposita sunt, dicatur c tota circumferentia cujus radius est r, dicatur Y vis Solis agens in Lunam secundum directionem PT & in datâ distantiâ CP à quadraturâ C, quæ distantia CP dicatur u, dicatur M tempus Periodicum Lunæ in circulo ADBC citrà Solis actionem, arcus exiguus à puncto P assumptus dicatur du, dico quod tempus quo similis arcus describetur in orbitâ in quam Luna per actionem Solis est translata erit $\frac{Mdu}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V} +$ &c.

Nam si vis Y quæ in punctum P à Sole exercetur, in exiguas particulas divideretur & singula quæ dicatur dY maneret constans durante unicâ revolutione Lunæ, sicque gradatim Lunam in circulum adbc transferret, tempus Periodicum in singulo circulo excederet tempus Periodicum in circulo præcedenti quantitate $\frac{2dY}{V}$. Hinc tandem tempus Periodicum quo circulus adbc describeretur foret $M \times 1 + \frac{2Y}{V} +$ &c. per Theor. III. & tempus quo arcus similis arcui du describeretur in eo circulo, foret ad hoc tempus Periodicum ut du ad c, foret itaque $\frac{Mdu}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V} +$, sed singulæ particulæ orbitæ quam Luna describit propter adjunctionem vis Solis spectari possunt quasi pertinerent ad circulos congruos vi Soli in illis punctis agenti, per Theor. V. Ergo, tempus inventum est illud ipsum, quo durante, Luna describet arcum similem arcui du in orbitâ in quam transfertur per actionem Solis.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROB. XVI.

LEMMA I.

Invenire integrales quantitatum ydu, zdu, y^2du, z^2ydu, zy^2du, yz^2du, y^3du, y^4du &c. factarum ex Elemento arcus & dignitatibus ejus sinus y, vel ejus Cosinus z. 121.



Ex naturâ circuli Triangulum PTE est simile Triangulo fluxionali Pmn; ideoque est PT (r) ad Pm (du) ut PE (y) ad Pn (dz), ut TE (z) ad mn (dy), hinc est $du = \frac{rdz}{y} = \frac{rdy}{z}$; Hinc fit Primò, ut, omnes termini in quibus alteruter factorum y vel z quantitatis du dimensionem habet imparis numeri, possint integrari; nam loco elementi du, ponatur ejus valor $\frac{rdz}{y}$ si y sit imparis dimensionis, vel $\frac{rdy}{z}$ si z sit imparis dimensionis, ea substitutione fiet ut pares evadant dimensiones y vel z quæ prius impares erant, & quia in primo casu habetur fluxio dz, loco y^2 substituatur $r^2 - z^2$, sicque omnes factores ducentes dz, erunt aut r aut z, ideoque quantitas proposita erit absolutè integrabilis, in altero casu cum habeatur fluxio dy, ut tollantur factores z cujus dimensiones sunt pares, loco z^2 substituatur $r^2 - y^2$, sicque omnes factores ducentes dy erunt aut r aut y ideoque habebuntur termini absolutè integrabiles.

Secundò, factores quantitatis du sint pares, & quidam primo sit z^2du vel y^2du; Integralis horum Elementorum est $r \times$ CPQT vel $r \times$ CPE, nam est $z^2du = rzdy$, & zdy est fluxio areæ CPQT; est $y^2du =$

$rydz$, & ydz eſt fluxio areæ CPE; itaque quando P ex C pervenit in A & abſolvit quadrantem Integralis z^2du vel

121. y^2du eſt $r \times \frac{rc}{8}$.

Sint itaque ambo factores y vel z quantitatis du numero pari qualicumque, ſemper reduci poterunt ita ut quantitas propoſita contineat dignitates pares alterutrius quantitatis, puta y, altera variabili excluſa ponendo loco z^2 quantitatem $r^2 - y^2$. Si ergo quæratur integralis quantitatis $y^{2m}du$, ut ea ad impares dimenſiones revocetur ſpectetur ut $y^{2m-1} \times ydu$; Eſt autem juxta Methodos vulgares $\int y^{2m-1} \times ydu = y^{2m-1}\int ydu - \int . \int ydu \times 2m-1 \times y^{2m-2}dy$, ſed $ydu = \frac{rydz}{y} = rdz$, & Integralis quantitatis dz ſumptæ à puncto C eſt $r-z$, hinc $\int ydu = rr - rz$, qua ſubſtituta in valore Integralis $\int y^{2m-1} \times ydu$ ea fit $y^{2m-1}r^2 - y^{2m-1}rz - rr\int 2m-1 \times y^{2m-2}dy + \int . rz \times 2m-1 \times y^{2m-2}dy$, ſive (quia $rr\int 2m-1 \times y^{2m-2}dy = \frac{2m-1}{2m-1} r^2y^{2m-1} = r^2y^{2m-1}$) eſt $\int . y^{2m}du = -rzy^{2m-1} + \int \times 2m-1 \times rz \times y^{2m-2}dy$ (ſive quia $rdy = zdu$) $= -rzy^{2m-1} + \int . 2m-1 \times z^2y^{2m-2}du$ (& loco z^2 ſubſtituendo $r^2 - y^2$) $= -rzy^{2m-1} + 2m-1\int . r^2y^{2m-2}du - 2m-1\int y^{2m}du$; Et tranſpoſitione facta eſt $2m\int y^{2m}du = -rzy^{2m-1} + \int 2m-1 \times r^2\int y^{2m-2}du$, & tandem $\int . y^{2m}du = \frac{2m-1}{2m} \times r^2\int y^{2m-2}du - \frac{rzy^{2m-1}}{2m}$; Hinc cum habeatur Integralis quantitatis y^2du; ſi quæratur Integralis y^4du ea obtinebitur per hanc formulam, ſiquidem in eo caſu eſt $y^{2m-2}du = y^2du$, & ex ejus integratione habetur integratio quantitatis $\int y^{2m}du$, quæ iſto in caſu eſt y^4du; Simili modo ex integrali quantitatis y^4du habebitur Integralis quantitatis y^6du &c.

Quando P pervenit in A, terminus $\frac{rzy^{2m-1}}{2m}$ evaneſcit, quia illic eſt $z = o$ habetur ergo $\int y^{2m}du = \frac{2m-1}{2m} r^2\int y^{2m-2}du$; In eo ergo caſu ſi quæratur integralis quantitatis y^4du, fiat $m = 2$ erit $\int . y^4du = \frac{3}{4}r^2\int y^2du$, ſed $\int . y^2du = \frac{r^2c}{8}$ ideoque $\int . y^4du = \frac{3r^4c}{4 \times 8}$; Si quæratur Integralis quantitatis y^6du fiat $m = 3$ & erit $\int y^6du = \frac{5}{6}r^2\int y^4du =$ ſed $\int . y^4du = \frac{3r^4c}{4.8.}$ ideoque $\int . y^6du \frac{3.5r^6c}{4.6.8}$.

Cor. 1. Si in primo caſu in quo alteruter factorum quantitatis du aut ambo factores ſunt imparis dimenſionis, totum elementum per quantitates r, z, dz exprimatur, Integralis quæ tunc obtinebitur non erit completa, quia coſinus z ex T incipit & arcus u ex puncto C, unde dz negativum eſſe debet; erit ergo $\int r^nz^mdz = C - \frac{r^nz^{m+1}}{m+1}$, ut hæc conſtans C obtineatur, obſervandum quod ubi u eſt o, ideoque evaneſcit hoc elementum tunc eſt $z = r$ ergo $o = C - \frac{r^{n+m+1}}{m+1}$ hinc $C = \frac{1}{m+1}r^{n+m+1}$; v. gr. ſit $\int . rz^3dz = C - \frac{rz^4}{4}$ fit $C = \frac{1}{4}r^5$.

Cor. 2. Si è contra arcus u ex puncto A inciperet, Integralis quæ obtinebitur cùm elementum per quantitatem y exprimetur completa non erit, & eâ ratione compleri debebit quæ in præcedenti Corollario eſt indicata.

Cor. 3. In ſecundo caſu, ſi u ex puncto A incipiat erit $\int . ydz =$ APET & $\int zdy$ eſt area APQ, ut liquet ex ipſa figura.

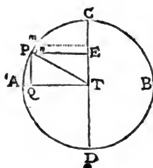
Cor. 4. Denique ſi u ex puncto A incipiat & ambo factores ſint uterque dimenſionis paris, elementum non eſt reducendum ad litteram y, ut in Lemmatis ſolutione factum eſt, ſed ad quantitatem z, quæ in toto calculo loco y ſubſtituatur & vice verſa; Liquet enim quod z eſt ſinus reſpectu arcus AP, & y ejus Coſinus.

PROBLEMA I.

Invenire totam retardationem Lunæ dum unam revolutionem abſolvit.

Conſ-

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.



Constat ex Theor. VI. Quod si Sol sit immotus, & Luna in tota revolutione eam vim Solis patiatur quam patitur in puncto P, eveniet ut tempus quo describitur arcus du, (quodque debet esse $\frac{Mdu}{c}$ posito M tempore Periodico Lunæ, & c Peripheria quam percurrit) evadat $\frac{Mdu}{c}\times\overline{1+\frac{2Y}{V}}$; itaque tempus illud producitur quantitate $\frac{Mdu}{c}\times\frac{2Y}{V}$, ideo cum tempore $\frac{Mdu}{c}$ iste arcus du describi debuisset hoc tempore $\frac{Mdu}{c}\times\frac{2Y}{V}$, arcus $\frac{2Y}{V}du$ describeretur, hæc est ergo retardatio Lunæ in puncto P orta per actionem Solis.

Sed in singulo puncto P orbitæ Lunaris vis Y est $\frac{F}{a}\times\overline{\frac{3yy}{r}-r}$ (per Theor. IV.) ergo Elementum retardationis Lunæ est du $\frac{2F}{Va}\times\overline{\frac{3yy}{r}-r}$, cujus Integralis secundum Lemma præcedens est $\frac{2F}{Va}\times\overline{\frac{3r4c}{8r}-\frac{1}{4}rc}$, sive $\frac{2F}{Va}\times\frac{1}{8}rc$, cum P pervenit in A, cumque idem sit Solis effectus in singulo quadrante tota retardatio Lunæ est $\frac{2F}{Va}\times\frac{4}{8}rc$ sive $\frac{Frc}{Va}$, dum Luna revolutionem absolvit, respectu Solis immoti:

Si reddatur Soli motus suus, & loco mensis Periodici M, mensis Synodicus μ intelligatur, & censeatur quod proxime verum est mensem synodicum qui respondet mensi Periodico in circulo adbc peracto, esse ad eum mensem Periodicum ut μ ad M, ideoque eum mensem Synodicum esse $\mu\times\overline{1+\frac{2Y}{V}}$ omnia procedent ut prius & erit $\frac{Frc}{Va}$ retardatio Lunæ toto ejus tempore synodico. 121.

Scrupulus esse potest, utrum in hac expressione, quantitas c designet peripheriam 360 grad. an eam peripheriam conjunctam cum via quam Sol emensus est mense synodico; sed ex integrationis adhibitæ ratione patet, actum fuisse de veris quadrantibus circuli, ideoque hic c designare peripheriam ipsam nihilque ultra, ita ut $\frac{Frc}{Va}$ sit retardatio absoluta Lunæ tempore synodico.

Verum alia certior correctio est adhibenda; Constat ex Propositione XXVI. hujusce Libri, velocitatem Lunæ augeri per Solis actionem Radio orbitæ Lunaris perpendicularem, ita ut, velocitas Lunæ in Quadraturis sit ad ejus velocitatem in quolibet puncto ut $109.73r$ ad $109.73r+\frac{yy}{r}$, hinc tempus quo describitur arcus du brevius fit in proportione velocitatum, ideoque cum id tempus fuerit $\frac{\mu du}{c}\times\overline{1+\frac{2Y}{V}}$, fit $\frac{109.73r}{109.73r+\frac{yy}{r}}\times\frac{\mu du}{c}\times\overline{1+\frac{2Y}{V}}$ sive fractionem ad series reducendo $\overline{1-\frac{yy}{109.73rr}}\times\frac{\mu dc}{c}\times\overline{1+\frac{2Y}{V}}$; Quantitas autem hæc $\frac{\mu dc}{c}\times\overline{1+\frac{2Y}{V}}$, duas partes continet, priorem independentem ab actione Solis secundum directionem radii exercitam, & de acceleratione ad hanc partem pertinente actum est in XXVI. Prop.; & hinc fit ut mensis synodicus medius sit brevior eo qui debuisset esse in proportione numeri 109.73 ad 110.73, & inæqualitates inde natæ in variis partibus mensis synodici in variatione continentur;

De Mundi Systemate.

altera pars $\frac{\mu du}{c} \times \frac{2Y}{V}$ pendet ab actione Solis secundum radium orbitæ Lunaris exercitam, & de hac sola illo calculo agitur,
121. ideoque cum ex ista oriatur retardatio $\frac{2Y}{V} du$, & tempus $\frac{\mu du}{c}$ fiat minus in proportione 1 ad $1 - \frac{yy}{109.73r^2}$ retardatio quæ fiet dum arcus du describi debuisset erit solummodo $\frac{2Ydu}{V} - \frac{2Yyydu}{109.73r^2V}$, loco Y ponatur $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$ evadet hoc Elementum $du \times \frac{2F}{Va} \times \frac{3yy}{r} - r - \frac{3y^4}{109.73r^3} + \frac{yy}{109.73r}$ cujus Integralis pro quadrante juxta Lemma I. est $\frac{2F}{Va} \times \frac{3r^2c}{8r} - \frac{1}{4}rc - \frac{3\times 3r^4c}{4\times 8\times 109.73r^3} + \frac{r^2c}{8\times 109.73}$ sive $\frac{2Frc}{Va} \times \frac{1}{8} - \frac{5}{4.8.109.73}$ & quadruplicatum pro tota revolutione fit $\frac{Frc}{Va} \times \frac{433.92}{438.92}$.

Coroll. Constat ex Cor. 2do. Prop. IV. Lib. I. Princ. Quod vires centrales sunt inter se directe ut radii & inverse ut temporum Periodicorum quadrata: hinc, si sit A annus sidereus, & M mensis Periodicus sidereus sepositâ omni Solis actione, erit F ad V ut $\frac{a}{AA}$ ad $\frac{r}{MM}$, sive $\frac{F}{V} = \frac{aMM}{rAA}$ substituto itaque hoc valore loco $\frac{F}{V}$ in quantitate $\frac{Frc}{Va} \times \frac{433.92}{438.92}$ quæ retardationem durante mense synodico exprimit, ea retardatio fit $\frac{M^2}{A^2} \times \frac{433.92}{438.92} c$, & si non attendatur ad correctionem quæ pendet ex actione Solis perpendicularis radio orbitæ Lunaris ea retardatio foret $\frac{M^2}{A^2} c$.

PROBL. II.

Dato tempore synodico apparenti Lunæ, invenire tempus periodicum quod observari debuisset, si abesset actio Solis in Lunam secundùm radium orbitæ Lunaris exercitam.

Sit S mensis synodicus apparens, A annus sidereus, inde (ex nota proportione mensis synodici ad Periodicum) invenietur mensem Periodicum apparentem esse $\frac{AS}{A+S}$, & quoniam hoc tempore Periodico Luna describeret peripheriam c deducetur quod tempore synodico S describet arcum $\frac{A+S}{A} c$.

Sed Luna citra Solis actionem tempore Periodico M describere debuisset Peripheriam c, &, eadem in Hypothesi, tempore S descripsisset aream $\frac{Sc}{M}$ hinc ergo retardatio absoluta quam patitur tempore S est $\frac{Sc}{M} - \frac{A+S}{A} c = \frac{AS - AM - MS}{AM} c$. Sed per Corollarium præcedentis problematis ea retardatio inventa fuerat $\frac{M^2}{A^2} \times \frac{433.92}{438.92} c$ hinc obtinetur hæc æquatio $AS - AM - MS = \frac{433.92\, M^3}{438.92\, A}$, loco M scribatur X A, loco S scribatur E A, & fiet hæc æquatio $A^2E - A^2X - A^2EX = \frac{433.92\, A^3X^3}{438.92\, A}$ sive $E = X + EX + \frac{433.92}{438.92} X^3$, sed mensis synodicus medius est .08084896 A hinc E = .0804896 & æquatio fit $.08084896 = 1.08084896\, X + \frac{433.92}{438.92} X^3$, loco X substituatur .0744 + R & æquatio evadit .08084896 = .08082129 + 1.09726905 R, unde habetur .00002767 = 1.09726905 R, hinc obtinetur R = .0000252 & M = .0744252 A.

THEOR. VII.

Si mutetur utcumque Solis à Terra distantia, ita ut loco a dicatur X, dico quod, cæteris manentibus, Retardatio Lunæ durante Tempore synodico, cum Ter-

Terra distabit à Sole quantitate X erit $\frac{a^3 M^2}{X^3 A^2} \times \frac{433.92c}{438.92}$.

Nam ex Problemate I. Retardatio Lunæ inventa fuerat $\frac{Frc}{Va} \times \frac{433.92}{438.92}$ sed in aliâ à Sole distantia loco a ponatur X, & præterea loco F ponatur $\frac{a^2 F}{X^2}$, decrescit enim vis Solis F ut quadrata distantiarum, hac ergo substitutione facta retardatio Lunæ fit $\frac{a^2 Frc}{X^3 V} \times \frac{433.92}{438.92}$; Tum vero loco $\frac{F}{V}$ substituatur $\frac{aM^2}{rA^2}$ & habebitur expressio Theorematis hujusce.

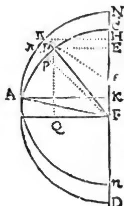
LEMMA II.

Foco F, axe majore N F n qui dicatur $2a$ describatur Ellipsis, sit e ejus excentricitas eaque parva sit, axis minor sit $2b$, erit $b^2 = a - e^2$; Ex foco ut Centro radio a describatur circulus, & ducantur à foco lineæ secantes circulum in P & Ellipsim in Π, linea FΠ dicatur X, sinus anguli AFP sit y, Cosinus z, Dico quod linea x erit $\frac{b^2 a}{a^2 \mp ez}$.

Ducatur ex Π, ΠH perpendicularis ad Axem, & propter Triangulorum FPE, FΠH similitudinem erit FP ad FΠ ut PE ad ΠH & ut FE ad FH, hoc est $a : x = y : \frac{y}{a}x = z : \frac{z}{a}x$: Sit f alter focus Ellipseos ex eo ducatur linea fΠ, ex natura Ellipseos est $f\Pi = 2a - x$ sed $f\Pi^2 = \Pi H^2 + fH^2$ & $\Pi H = \frac{y}{a}x$, & $fH = FH - Ff$ vel $Ff - FH$ vel $Ff + FH$, & est $Ff = 2e$ & $FH = \frac{z}{a}x$ hinc $\Pi H^2 + fH^2 = \frac{y^2}{a^2}x^2 + \frac{z^2}{a^2}x^2 \mp \frac{4ez}{a}x + 4e^2 = f\Pi^2 = 4a^2 - 4ax + x^2$, est autem $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2}x^2$ $x^2 = x^2$, ergo $\mp \frac{4ez}{a}x + 4e^2 = 4a^2 - 4ax$, & dividendo per 4 & transponendo est $ax \mp \frac{ez}{a}x = a^2 - e^2 = b^2$; Unde habetur $x = \frac{b^2 a}{a^2 \mp ez}$. Q. E O.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

121.



Cor. Hic valor x in series resolutus est $\frac{b^2}{a} \times 1 \pm \frac{ez}{a^2} + \frac{z^2 e^2}{a^2} \pm \frac{e^3 z^3}{a^3}$ &c. sumptis signis superioribus quando E cadit in eâdem parte ac centrum, & sumptis signis inferioribus quando E cadit in parte in quâ non est centrum.

Cor. 2. Si fractio $\frac{a}{x} \times \frac{a^2 \mp ez}{b^2}$ ad dignitates superiores evehatur termini in quibus e plurium dimensionum poterunt omitti, propter suppositionem excentricitatem exiguam esse, & quidem si agatur de Solis excentricitate ea non assurgit ad duas centesimas radii, & excentricitas Lunæ non assurgit ad septem centesimas.

Cor. 3. Hinc tardatio Lunæ quæ ex Solis actione pendet, fiet durante tempore synodico S, $\frac{433.92c}{438.92} \times \frac{M^2}{A^2} \times \frac{a^2 \mp ez^3}{b^6}$, positis a pro semi-axe majore orbitæ Solis, e pro ejus excentricitate, & b pro axe minore.

PROBL. III.

Determinare quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis dum Ter-

DE MUNDI SYSTEMATE. 121. Terra describit circa Solem arcum quamminimum datum.

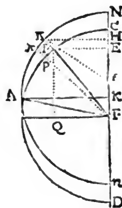
Sit ut in præcedenti Lemmate N Π n Ellipsis quam terra describit, sit Sol in foco F, ducatur ut prius linea F P Π & ei quam proxima F p π quæ secet in circulo C A D arcum P p, & quæratur quantitas graduum quâ tardatur Luna per Solis actionem, dum Terra videretur e Sole, descripsisse arcum P p.

Sit ut prius A tempus annuum, a Ellipseos semi-axis major, k circumferentia eo radio descripta ex foco F, sit e excentricitas, $b=\sqrt{a^2-e^2}$ semi-axis minor, area semi-circuli $\frac{ak}{4}$, quæ est ad aream semi-Ellipseos ut est a ad b, hinc area semi-Ellipseos est $\frac{bk}{4}$.

Dicatur arcus A P, u, arcus P p sit du, radio F Π sive X describatur arculus ex π in F Π, is erit ad du ut est F Π sive X ad a, ergo is arculus erit $\frac{x\,du}{a}$, ideoque area F Π π est $\frac{x^2du}{2a}=\frac{b^4a\,du}{2\times\overline{a^2\mp ez}^2}$ (per Lem. præced.)

Sed tempus quo terra arcum P p descripsisse videtur est ad tempus semestre $\frac{1}{2}$ A, ut hæc area F Π π, sive $\frac{x^2du}{2a}$ ad semi-Ellipsim $\cdot\frac{bk}{4}$, Est itaque illud tempus quo terra arcum P p descripsisse videtur $\frac{4x\,du}{2abk}\times\frac{1}{2}A=\frac{x^2A\,du}{abk}$.

Inventum autem est quod tempore S Luna tardabatur propter actionem Solis quantitate $\frac{433.92\,c}{439.92}\times\frac{M^2a^3}{A^2x^3}$ ergo tempore $\frac{x^2A\,du}{abk}$ tardabitur quantitate $\frac{433.92\,c\times x^2A\,du}{438.92\times Sabk}\times\frac{M^2a^3}{A^2x^3}$ sive $\frac{433.92\,c\times du}{438.92\times S.b.k}\times\frac{M^2a^2}{Ax}$, aut substituendo valorem fractio. $\frac{a}{x}$, fit $\frac{433.92.cdu}{438.92.Sbk}\times\frac{M^2a}{A}\times\frac{a^2\mp ez}{b^2}$ sive $\frac{433.92cdu\times M^2a}{438.92\,SAb^3k}\times a^2\mp ez$;



PROBL. IV.

Invenire retardationem Lunæ ex actione Solis ortam durante semestri revolutione terræ circa Solem.

Primo inveniatur Integralis Elementi per Probl. III. inventi quod est $\frac{433.92\,c\,du\times M^2a}{438.92.\,S.\,A.\,b^3k}\,a^2\pm az$ cujus Integralis est $\frac{433.92\,c\times M^2a}{438.92.\,S.\,A\,b^3k}\times a^2u\mp aey$.

Si ergo sumatur semestris revolutio, illic est $u=\frac{1}{2}k$, & termini in quibus occurrit y sese destruunt, ut quidem liquet ex eo quod y illic evanescat, unde semestris retardatio fit $\frac{433.92c\times M^2a}{438.92SAb^3k}\times\frac{1}{2}a^2k=\frac{433.92c\times M^2a^3}{438.92\,S\,A\,b^3}\times\frac{1}{2}$ sive ponendo $a=b$ quod proxime verum est $\frac{433.92\,c\,M^2}{438.92\,S\times A}\times\frac{1}{2}$.

Cor. Si quæratur retardatio Lunæ, facta tempore quo Terra à suo Aphelio ad mediocrem ejus distantiam pervenit, observandum quod eo in loco arcus u est $\frac{1}{4}k-e$, & y est b, unde Integralis inventa evadit $\frac{433.92c\times M^2a}{438.92S.\,A\,b^3k}\times\frac{1}{4}a^2k-a^2e-abe$, aut simplicius si quantitates a & b pro æqua-

æqualibus sumere liceat fiet $\frac{433.92 e \times M^2}{438.92 S.A k} \times \frac{1}{4} k - 2 e$ sive $\frac{433.92 e a^3 \times M^2}{438.92 \times SA b^3} \times \frac{1}{4} - \frac{2e}{k}$.

PROBL. V.

Invenire Æquationem motus medii Lunaris quæ pendet ex Solis actione, & quæ est adhibenda quando Terra est in suâ mediocri distantiâ à Sole.

Primo observandum est motum Lunæ qualis ex apparentiis determinatur ex duplici causâ pendere, ex actione Terræ cum motu projectili conjunctâ & ex Solis actione quæ motum ex præcedenti causâ natum tardat; Prior motus in orbe circulari uniformis foret, sed tardatio ex alterâ causâ procedens inæqualiter priori illi sese immiscet, Astronomi verò cum motum medium Lunæ æstimant, hanc tardationem sumunt quasi uniformiter in omne tempus distributam.

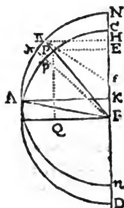
Cum ergo ea tardatio major sit in aliquibus Terræ positionibus, in aliis sit minor, quæstio est quænam correctio motui medio Lunæ sit facienda, ut habeatur Lunæ locus verus, ideoque investiganda est differentia inter tardationem proportionaliter tempori distributam, & tardationem veram quæ singulo loco competit, quæ differentia loco medio addita aut ex eo detracta restituet verum locum Lunæ quatenus hæc sola irregularitas spectatur.

Ut ergo habeatur tardatio tempori proportionalis quando Terra est in mediocri distantia, fiat secundum Regulam Keplerianam, ut area semi-Ellipseos (quæ est $\frac{bk}{4}$ & est semestri tempori proportionalis) ad aream F N A (quæ est Ellipseos quarta pars cum Triangulo F A K ideoque est $\frac{bk}{8} + \frac{be}{2}$ & est proportionalis tempori quo Terra ab Aphelio suo ad mediocrem à Sole distantiam pervenit) hoc est ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{4} + \frac{e}{k}$, ita tardatio semestri tempore facta quæ (per Probl. IV.) est $\frac{433.92 e a^3 \times M^2}{438.92 S A b^3} \times \frac{1}{2}$, ad tardationem proportionalem tempori quo Terra ab Aphelio ad mediocrem suam à Sole distantiam pervenit, quæ erit ergo $\frac{433.92 e a^3 \times M^2}{438.92 S A b^3} \times \frac{1}{4} + \frac{e}{k}$; sed per Cor. Probl. IV. vera tardatio eo in loco erat $\frac{433.92 e a^3 \times M^2}{438.92 S A b^3} \times \frac{1}{4} - \frac{2e}{k}$. Hinc substractione factâ, tardatio mediocris superat tardationem veram quantitate $\frac{433.92 e a^3 \times M^2}{438.92 S.A b^3} \times \frac{3e}{k}$. Hæc ergo quantitas graduum debet addi loco medio ut locus verus obtineatur. Si ergo loco e sumatur $.016\frac{7}{8} a$, erit $3e = .050\frac{5}{8} a$, & loco k scribatur $6.283188\ a$; & loco c, 360gr. erit $\frac{3ec}{k} = \frac{18^{gr}.225}{6.283188} = 2^{gr}.9005$; Præterea $\frac{M^2}{S.A}$ ad calculum revocatur si loco M ponatur, 0744252 A; & loco S, .08084896 A, ut in Prob. 2do. repertum est, fit $\frac{M^2}{S.A} = .06851183835$, idque ductum in fractionem $\frac{433.92}{438.92}$ efficit. 06773137 cumque fractio $\frac{a^3}{b^3}$ sit tantum 1 00045 & superius sumptum sit a loco b hæc fractio pro unitate sumi potest, hinc est $\frac{a^3 M^2}{b^3 S.A} \times \frac{433.92}{438.92} = .06773137$, quod ductum in 2gr. .9005 efficit 0°.19646 quod ductum per 60' efficit 11'.7876, sive 11'. 47''. 256''', quam Newtonus 11'. 49'' assumit; majorem autem Æquationem in Hypothesi Elliptica inveniemus, unde medium quoddam inter utramque ab ipso assumptum esse videtur.

Cor. 1. Cum hæc æquatio sit $\frac{433.92 \times e a^3 \times M^2}{438.92 \times S. b^3 A} \times \frac{3e}{k}$ sive proxime $\frac{433.92 e \times M^2}{438.92 S \times A} \times \frac{3e}{k}$, & quantitates c, M, S, A, k, sint constantes, hæc æquatio, ubi Tellus est in suâ mediocri distantiâ, est sicut excentricitas orbitæ Telluris e, ideoque si ea excentricitas major sit quam $.016\frac{7}{8}$ radii a, crescet hæc æquatio in hac proportione; sit v. gr. $e = a \times .016\frac{11}{12}$,

De Mundi Systemate. & fiat ut $16\frac{7}{8}$ ad $16\frac{11}{12}$ ita 11'. 47''.616 ad quartum, is quartus terminus 11'.49''.42, erit æquatio, suppositâ excentricitate orbitæ Telluris $.016\frac{11}{12}$, hoc in casu Newtonus Æquationem facit 11'. 50''.

121.



Cor. 2. In alio quovis loco orbitæ Telluris, æquatio habebitur si fiat ut semi-Ellipsis $\frac{bk}{4}$ ad aream $FN\Pi$ ita semestris tardatio $\frac{433.92\,cM^2}{438.92\times S.A}\times\frac{a^3}{2b^3}$ ad tardationem huic tempori proportionalem, quæ erit ergo $\frac{433.92\,c\times M^2\times FN\Pi}{438.92\times S\times A\,b^3}\times\frac{2a^3}{bk}$ tum vero si sumatur tardatio loco Π conveniens quæ est $\frac{433.92\times c\times M^2 a}{438.92\times S\times A\,b^3 k}\times a^2 u\mp aey$, (Probl. 4.) erit hæc æqu. $\frac{433.92\,c\times M^2 a^2}{438.92\times S.A\times b^3 k}\times\frac{2a\times FN\Pi}{b}-au\pm ey$, ideoque erit ut $\frac{aaFN\Pi-abu\pm bey}{b}$; aut sumendo $u=b$, ut $\frac{2FN\Pi-bu\pm ey}{b}$. Jam vero hæc quantitas est ipsa æquatio centri Solis; nam arcus qui describeretur per motum medium Solis eo tempore quo arcus u reverâ percurritur hac proportione obtinetur, ut semi-Ellipsis $\frac{bk}{4}$ ad aream $FN\Pi$ ita semicirculus $\frac{1}{2}k$ ad arcum medio motu descriptum qui ergo erit $\frac{4FN\Pi}{bk}\times\frac{1}{2}k=\frac{2FN\Pi}{b}$; sed arcus tunc temporis reverâ descriptus, est $N\Pi$ sive u, ergo æquatio centri Solis est $\frac{2FN\Pi}{b}-u$ sive $\frac{2FN\Pi-bu}{b}$ cui quantit. $\frac{2FN\Pi-bu\pm ey}{b}$ est quam proximè æqualis, nam terminus ey propter exiguitatem e respectu b, & y respectu u considerationem nullam hic meretur, ergo æquatio Lunaris in quovis loco orbitæ Telluris est sicut æquatio centri Solis eo in loco; Ergo ut æquatio centri Solis in mediocri distantia Telluris à Sole, est ad æquationem motus Lunaris adhibendam cum Tellus est in ea mediocri distantia à Sole, ita est æquatio centri Solis in quâvis distantiâ u ab Aphelio, ad æquationem Luni Solarem primam Lunæ illi loco convenientem.

Cor. 3. Æquatio ista Lunæ, quæ Solaris prima dicitur, est maxima in distantia mediocri Terræ à Sole; nam cum sit proportionata æquationi centri Solis, & æquatio centri Solis sit maxima in mediocri distantiâ Telluris à Sole per ea quæ primo Libro circa hanc æquationem demonstrata sunt, Æquatio Solaris Lunæ eo in loco maxima pariter erit.

De *Incremento motus medii Lunæ, & ejus æquatione ex Solis actione pendentibus, in Hypothesi eum orbem esse Ellipticum, Methodo diversâ ab eâ quæ in calculo præcedente fuit adhibitâ.*

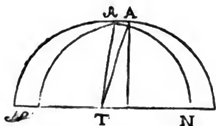
THEOR. I.

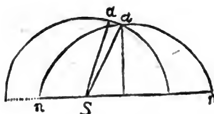
Sint duæ Ellipses descriptæ circa corpora centralia in ipsarum focis posita, quorum vires absolutæ diversæ sint; Dico, quod si Tempora Periodica in utraque Ellipsi sint ut earum Ellipsium areæ; Ellipses illæ erunt inter se similes.

Describantur duæ Ellipses NAN, nan, circa corpora S & f in focis Ellipsium posita, & quorum vires sint diversæ, si totum tempus quo describitur Peripheria Ellipseos NAN, sit ad totum tempus quo describitur Peripheria Ellipseos nAn ut area prioris Ellipseos ad aream alterius, Ellip-

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

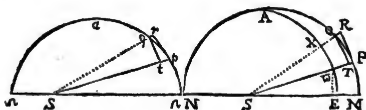
III.





Ellipses illæ similes esse debebunt, hoc est earum Ellipsium axes majores erunt inter se ut sunt inter se earum minores axes, v. gr. si semi-axis major Ellipseos N A N dicatur r, ejus minor semi-axis dicatur q & major semi-axis Ellipseos n a n dicatur ϱ, ejus minor semi-axis $\varkappa$, Dico quod erit q ad $\varkappa$ ut est r ad ϱ.

Ex naturâ Ellipsium area Ellipseos NAN est ad aream Ellipseos n a n ut est rq ad $\varrho\varkappa$, & ex Hypothesi tempus Periodicum in Ellipsi N A N est ad tempus Periodicum in Ellipsi n a n in eadem ratione rq ad $r\varkappa$, si ergo sumantur arcus similes A A, a a in mediocri distantiâ in utrâque Ellipsi, tempora quibus describentur illi arcus erunt ut tota tempora Periodica, quia illi arcus A A, a a in mediocri distantiâ positi describuntur motu medio corporum eas Ellipses describentium, & erunt etiam ut areæ A S A & a s a ex Hypothesi, & istæ areæ A S A & a s a, sunt ut quadrata linearum S A & s a sive ut r^2 ad ϱ^2; Ergo est r^2 ad ϱ^2 ut rq ad $\varrho\varkappa$, & dividendo terminos homologos per r & ϱ est r ad ϱ ut q ad $\varkappa$; Ergo Ellipses sunt similes. Q. E. D.



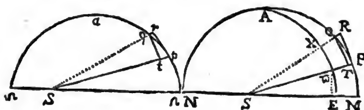
THEOR. II.

Sint, ut prius, duæ Ellipses descriptæ circa corpora centralia in ipsarum focis posita quorum vires absolutæ diversæ sint, & sint tempora Periodica in utrâque Ellipsi ut earum Ellipsium areæ, Dico quod axes majores earum Ellipsium erunt reciprocè ut vires absolutæ corporum centralium.

Vis absoluta corporis S dicatur V, corporis s dicatur V—Y, ducantur in utrâque Ellipsi lineæ S P, s p ad lineas apsidum S N, s n similiter inclinatæ, & iis proximæ ducantur lineæ S Q, s q angulos similes P S Q, p s q constituentes, ducantur ex Q & q perpendiculares Q T, q t in lineas S P, s p, & productis lineis S Q s q donec occurrant Tangentibus in R & r, erunt Q R, q r virium centralium effectus dum describuntur arcus P Q, p q.

Primò quidem ex Hypothesi, Tempora quibus describentur ii arcus P Q, p q erunt ut areæ P S Q, p s q, & quia, ex const. illæ areæ sunt similes, erunt ut quadrata linearum homologarum sive ut SP^2 ad sp^2 aut QT^2 ad qt^2. Sunt autem virium centralium effectus, directè ut vires centrales & ut quadrata temporum, vires verò centrales sunt ut

121.



$\frac{V}{SP^2}$ ad $\frac{V-Y}{sp^2}$, & quadrata temporum sunt ut SP^4 ad sp^4, Ergo lineæ QR & qr erunt inter se ut $\frac{V}{SP^2}\times SP^4$ ad $\frac{V-Y}{Sp^2}\times sp^4$, sive ut $V\times SP^2$ ad $\overline{V-Y}\times sp^2$, aut denique ut $V\times QT^2$ ad $\overline{V-Y}\times qt^2$.

Secundo, In omnibus Ellipsibus per vim centralem ex foco prodeuntem descriptis latus rectum est æquale $\frac{QT^2}{QR}$ ut constat ex Prop. XI. Lib. I. Princ. Si itaque latus rectum Ellipseos NAN sit L, Ellipseos vero nan sit λ erit $L=\frac{QT^2}{QR}$ & $\lambda=\frac{qt^2}{qr}$, loco QR & qr quantitates ipsis proportionales $V\times QT^2$ & $V-Y\times qt^2$ collocentur, & erit L ad λ ut $\frac{QT^2}{V\times QT^2}$ ad $\frac{qt^2}{V-Yqt^2\times}$ sive ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V-Y}$; sed ex naturâ Ellipsium, est $L=\frac{q^2}{r}$ & $\lambda=\frac{\kappa^2}{\varrho}$, præterea quia Ellipses sunt similes ex præcedente Theoremate est $q:r=\kappa:\varrho$, ideoque $\frac{q}{r}=\frac{\kappa}{\varrho}$; Est ergo $L:\lambda$ ut q ad κ sive ut r ad ρ; Itaque est r ad ρ ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V-Y}$. Q. E. D.

Cor. In his itaque Hypothesibus Tempora Periodica erunt inverse ut Quadrata virium absolutarum corporum S & s; sunt enim per Theor. I. ut r^2 ad ϱ^2, & ex hoc Theoremate est r ad ρ ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V-Y}$; Ergo Tempora Periodica sunt ut $\frac{1}{V^2}$ ad $\frac{1}{\overline{V-Y}^2}$.

THEOR. III.

Sit T terra, P Luna quæ circa terram (sepositâ omni actione Solis) describat orbitam circulo proximam tempore Periodico M, Vis absoluta Terræ in Lunam dicatur V, minuatur ea vis absoluta quantitate exiguâ Y; Dico quod si ea vis V−Y maneat constans Luna describet circa Terram orbitam similem illi quam prius describebat, ita ut si prioris orbitæ semi-axis major dicatur r, semi-axis major orbitæ novæ erit $\frac{Vr}{V-Y}$ & tempus Periodicum erit $\frac{V^2M}{\overline{V-Y}^2}$ sive $M\times 1+\frac{2Y}{V}+\frac{3Y^2}{V^2}+\frac{4Y^3}{V^3}$ &c.

Nam 1°. cum Luna discedit à suâ orbitâ, retinetur tamen per vim decrescentem secundum quadrata distantiarum, describet ergo circa corpus in foco positum sectionem Conicam, quæ erit adhuc Ellipsis, quia mutatio vis centralis ponitur exigua, & per vim priorem orbita circulo finitima describebatur ita ut nec in Hyperbolam nec in Parabolam mutari possit hæc orbita.

2°. Cum vis nova Y ad centrum sit etiamnum directa, quamcumque in viam flectatur Luna, areæ semper manebunt Temporibus proportionales, ideo si tandem in orbitam a d b ς deveniat ex orbi-

ta

ta A D B C, tempus quo deſcribetur peripheria a d b c erit ad tempus M quo deſcribebatur peripheria A D B C ut tota area A D B C ad aream a d b c.

3°. Cum ergo in his orbitis A D B C, a d b c (quæ deſcribuntur circa corpus idem quidem, ſed cujus vis abſoluta alia cenſetur cum deſcribitur orbita A D B C quam cum deſcribitur a d b c) tempora ſint areis proportionalia, iſtæ areæ ſimiles erunt, per Theor. I., circuliſque finitimæ per Hyp., axes majores erunt inversè ut vires V & V−Y, per Theor. II. & tempora Periodica ut $\frac{1}{V^2}$ ad $\frac{1}{\overline{V-Y}^2}$ itaque ſi in orbita A D B C, id tempus dictum fuerit M, in orbita a d b c, erit $\frac{V^2 M}{\overline{V-Y}^2}$, ſive hanc quantitatem in ſeriem reſolvendo $M \times 1 + \frac{2Y}{V} + \frac{3Y^2}{V^2}$. Q. E. D.

Cor. Iiſdem Principiis oſtendetur, quod ſi vis abſoluta terræ augeretur quantitate exigua Y, Luna deferretur in orbitam interiorem $\alpha\delta\beta\varkappa$ ſimilem priori A D B C, cujus radius foret $\frac{rV}{V-Y}$, ſumendo quantitatem Y negativè & quæ deſcriberetur tempore $M \times 1 + \frac{2Y^2}{V} + \frac{3Y^2}{V^2} + \frac{4Y^3}{V^3}$ &c. ſumendo negativè terminos in quibus quantitas Y eſt imparium dimenſionum.

Ut autem ſervetur hæc conditio quantitatem Y eſſe exiguam, fractiones $\frac{3Y^2}{V^2}$ &c. ſunt delendæ in utroque caſu ut infinitè parvæ.

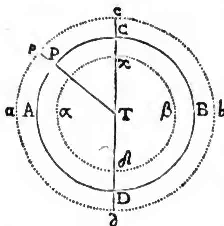
Schol. In primo calculo, cum ſuppoſuerimus orbitam Lunæ A D B C eſſe circularem, orbitas novas a d b c, $\alpha\delta\beta\varkappa$ circulares etiam eſſe, ſupponere neceſſe erat per Theor. I. hujuſce calculi.

THEOR. IV.

Sit T Terra, P Luna, A D B C orbita quam Luna circa terram deſcriberet ſepoſitâ omni Solis actione, ſit S T diſtantia mediocris Terræ à Sole quæ dicatur a; dicatur F vis Solis in Terram ipſam in mediocri illâ diſtantia, diſtantiâ Lunæ à Terrâ P T dicatur r; Sit C P diſtantia Lunæ à quadraturâ proximâ quæ dicatur u, ſit ejus ſinus y, ſit ejus coſinus z; Dico quod ea pars vis Solis quæ agit in Lunam ſecundum directionem radii P T eſt ubique $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$. Hoc Theor. idem eſt cum Theor. I V. præcedentis calculi, cujus demonſtratio adiri poteſt.

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.



THEOR. V.

Effectus actionis Solis in Lunam secundum directionem radii orbitæ Lunaris exercitæ intelligi poterit, si concipiatur Lunam ex suâ orbitâ A D B C in aliam transferri cujus singulæ particulæ quamminimæ, forent portiones earum orbitarum quas Luna reverâ describeret, si vis Terræ constanter imminuta aut aucta foret eâ quantitate, quæ, per actionem Solis in eam particulam exercitæ, ex vi Terræ detrahitur aut ei additur.

Etenim cum ea vis Solis per gradus infinité parvos crescat & decrescat, sitque nulla cum $\frac{3yy}{r} = r$, paulo post minima sit, sicque gradatim crescat, si censeatur eam constantem manere per aliquod tempusculum, Luna brevissimé transibit in orbitam a d b c illi vi congruam per Theor. III. mox verò cum vis Solis crescat quantitate quam minimâ ea vis censeatur iterum constans per alterum tempusculum transibit Luna ex orbitâ primæ vi congruâ in alteram huic incremento consentaneam, sicque semper: ideoque in singulis particulis arcus C P, censeri potest Lunam delatam esse in orbitam vi Solis in eo puncto agenti congruam.

THEOR. VI.

Dicatur mediocris distantia Lunæ à Terra, r; vis Terræ in eâ distantiâ sit V, vis Solis sive addititia sive subtractiva sit, quæ agit in Lunam secundum radii Telluris directionem, sit Y in eâ mediocri distantiâ à Terra, crescat verò ut distantiæ; Dicatur x alia quævis distantia Lunæ à Terrâ in quâ vis Terræ erit $\frac{rrV}{xx}$, & vis Solis erit $\frac{xY}{r}$; Dico quod vis corporis centralis quæ in distantiâ x foret $\frac{rrV}{xx} - \frac{xY}{r}$, in mediocri distantiâ esse debuisset $V - \frac{x^3}{r^3}Y$.

Nam siquidem fingitur vim Corporis ejus centralis fictitii sequi legem gravitatis & decrescere sicut quadrata distantiarum fiat ut $\frac{1}{xx}$ ad $\frac{1}{rr}$ ita $\frac{rrV}{xx} - \frac{xV}{r}$ quæ est vis in distantiâ x ad $V - \frac{x^3}{r^3}Y$ quæ erit vis in distantiâ r.

THEOR. VII.

Sit x ut prius distantia Lunæ à Terrâ in propriâ orbitâ, dico quod per actionem Solis illa distantia fiet $\frac{r^3xV}{Vr^3 - Yx^3}$, sive hoc valore in seriem redacto fiet $x + \frac{x^4Y}{r^3V} + \frac{x^7Y^2}{r^6V^2}$ &c. aut omissis terminis superfluis $x + \frac{x^4Y}{r^3V}$.

Nam nova orbita in quam Luna delata censetur est similis priori per Lem. I. & per Lem. II. earum lineæ Homologæ sunt ut vires absolutæ corporum centralium inversé, seu ut vires quas habent in distantiis æqualibus, nempe inversé ut $V - \frac{x^3}{r^3}Y$ ad V, ergo ut $V - \frac{x^3}{r^3}Y$ ad V, ita x ad distantiam Homologam in novâ orbitâ quæ erit ergo $\frac{xV}{V - \frac{x^3}{r^3}Y}$ sive $\frac{r^3xV}{Vr^3 - x^3Y}$.

Q. E. D.

THEO-

THEOR. VIII.

Centro S, radio æquali mediocri distantiæ r, describatur circulus, arcus ejus ϖX inter lineas SP, SQ interceptus dicatur du; Dico primò quod Luna in eo circulo uniformiter moveri posset eodem tempore Periodico quo moveretur in propriâ orbitâ si abesset vis Solis, ideoque si tempus Periodicum Lunæ in propriâ orbitâ dicatur M, & tota Peripheria circuli cujus radius est r dicatur c, tempus quo arcus du describetur mediocri Lunæ motu citra Solis actionem erit $\frac{Mdu}{c}$; 2°. Cum sit r semi-axis major Orbitæ Lunaris, si dicatur q ejus axis minor, Dico quod tempus quo idem ille arcus du describi videbitur urgente Solis actione & spectatâ excentricitate orbitæ Lunaris erit $\frac{Mdu}{c} \times \frac{x^2}{qr} + \frac{2x^5Y}{qr^4V} + \frac{3x^8Y^2}{qr^7V^2}$ &c.

Primo enim liquet quod is circulus describetur eo tempore Periodico quo describeretur orbita Elliptica Lunaris si sola vis Telluris agat; nam si corpora plura circa centrum commune revolvantur in quibuscumque Ellipsibus, Tempora eorum Periodica sunt in sesquiplicatâ ratione axium majorum (per Prop. XV. Lib. I. Princ. Newt.) sed hujus circuli & orbitæ Lunaris axes majores sunt æquales (per const.) Ergo eorum tempora Periodica sunt æqualia.

Secundo dicatur E tota superficies Ellipseos orbitæ Lunaris, hæc superficies E erit ad aream SQP ut tempus Periodicum M ad tempus quo arcus PQ describeretur, quod erit ergo $\frac{SQP \times M}{E}$ valor autem areæ SPQ est $\frac{QT \times SP}{2}$, sed ut r ad du ita SQ sive SP (x) ad QT, est ergo $QT = \frac{xdu}{r}$ & $\frac{QT \times SP}{2} = \frac{xxdu}{2r}$ hinc tempus quo Luna in propriâ orbitâ citra Solis actionem describeret arcum QP est $\frac{Mxxdu}{2r.E}$. Hoc autem tempus erit ad illud quo describeretur similis arcus in orbitâ in quam Luna per actionem Solis defertur ut quadrata radiorum seu, per (Theor. præc.) ut xx ad $xx + \frac{2x^5Y}{r^3V}$ ita $\frac{Mxxdu}{2r.E}$ ad $\frac{Mdu}{2r.E} \times xx + \frac{2x^5Y}{r^3V}$, sive cùm semi-axis minor orbitæ Lunaris dicatur q & area Ellipseos E sit ideo $\frac{1}{2}qc$, Tempus quo arcus du describi videbitur à Lunâ translatâ per actionem Solis in aliam orbitam fiet $\frac{Mdu}{c} \times \frac{xx}{qr} + \frac{2x^5Y}{qr^4V}$ + &c. 121.

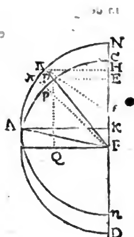
Cor. 1. Ex ipsâ demonstratione liquet quod tempus quo citra Solis actionem describeretur area SPQ foret $\frac{Mdu}{c} \times \frac{xx}{qr}$, & discrepantiæ illius quantitatis à motu medio in æquatione Lunæ, quæ dicitur soluta, continentur: excessus vero (vel defectus si vis Y fiat negativa) $\frac{Mdu}{c} \times \frac{2x^5Y}{qr^4V}$ per Solis actionem genitus novam motus medii perturbationem producit de quâ hic agendum; Ergo, siquidem per medium motum tempore $\frac{Mdu}{c}$ arcus du descriptus fuisset, tempore hujus excessus $\frac{Mdu}{c} \times \frac{2x^5Y}{qr^4V}$ arcus $\frac{2x^5Ydu}{qr^4V}$ describi potuisset, eâque quantitate graduum tardatur medius motus Lunæ propter actionem Solis secundum directionem radii orbitæ Lunaris exercitam.

Cor. 2. Iisdem vero ratiociniis quibus usi sumus in solutione Probl. 1. calculi præcedentis constabit, quod propter accelerationem quæ oritur per actionem Solis perpendiculariter in radium orbitæ Lunaris exercitam hæc retardatio $\frac{2x^5Ydu}{qr^4V}$ debet minui in proportione 1 ad $1 - \frac{yy}{109.73r^2}$ sicque evadit $\frac{2x^5Ydu}{qr^4V} - \frac{2x^5y^2Ydu}{109.73qr^6V}$.

LEM-

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.



LEMMA I.

Ex præcedentis calculi Lemmate II. constat quod si ex puncto ϖ ducatur perpendicularis ϖ E in lineam Apsidum, & excentricitas dicatur f erit FH sive $x = \frac{q^2 r}{r^2 \mp f \times FE}$.

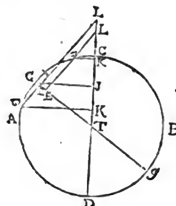
Nulla enim est differentia nisi in litteris, quæ diversæ sunt quia hic agitur de orbitâ Ellipticâ Lunæ illic de orbitâ Ellipticâ Telluris, cæterum eadem est demonstratio.

Hic autem valor in seriem redactus evadet $\frac{q^2}{r} \times 1 \pm \frac{FE \times f}{r} + \frac{FE^2 \times f^2}{r^4} \pm \frac{FE^3 \times f^3}{r^6}$ &c.

Signa superiora adhibenda sunt cum Luna distat ab Apogæo minus quam 90 gr. tam in consequentia quam in antecedentia, cum Luna magis distat ab Apogæo quam 90 gr. signa inferiora sunt adhibenda.

LEMMA II.

Si linea Apsidum non coincidat cum lineâ quadraturarum, Dicatur vero m sinus anguli lineæ quadraturarum & lineæ Apsidum, & n ejus anguli cosinus; Sit y sinus distantiæ Lunæ à quadraturâ, z ejus cosinus, Dico quod distantia Lunæ à terrâ, quæ dicitur x erit $\frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz + my}$ cum Luna est in eâdem quadraturâ cum alterutrâ Apsi, est verò $\frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz - my}$ cum Luna & alterutra Apsis non sunt in eâdem quadraturâ.



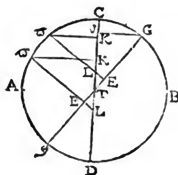
Sit CADB circulus descriptus centro T, radio æquali mediocri distantiæ Lunæ à terrâ quæ dicitur r. Sit GTg linea Apsidum, CTD linea quadraturarum, GI sinus anguli lineæ quadraturarum & lineæ apsidum qui dicitur m, TI ejus cosinus qui dicitur n, ϖ punctum circuli CADB quod respondet vero loco Lunæ in peripheria suæ orbitæ, quod sumitur vel ultra vel citra apsidem, ϖ K sinus distantiæ Lunæ à quadraturâ qui dicitur y, TK ejus cosinus qui dicitur z, Ducatur ex ϖ in lineam apsidum perpendicularis ϖ E, quæ producatur donec secet lineam quadraturarum in L, Triangulum TIG est simile Triangulo TEL (ob angulos rectos E & I & angulum communem T); Triangulum TEL est simile Triangulo ϖ KL (ob angulos rectos E & K & angulum communem L; Hinc est TI (n) : IG (m) : : ϖ K (y) : KL $= \frac{my}{n}$; Hinc in isto casu TL = TK + KL $= z + \frac{my}{n}$, sed ex similitudine Triang. TIG & TEL est TG (r) : TI (n) : : TL $(z + \frac{my}{n})$: TE $= \frac{nz + my}{r}$, substituto ergo

go hoc valore in valore x Lemmate superiori reperto fit $\frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz + my}$.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROB. XVI.

121.

Q



Si ϖ & apsis alterutra non sint in eadem quadratura, & 1°. si tamen ϖ non distet 90 gr. à proxima apside, similia erunt ut prius Triang. TJG, TEL, ϖKL, unde erit KL $= \frac{my}{n}$, sed erit TL = TK − KL sive $z - \frac{my}{y}$, unde fiet TE $= \frac{nz - my}{r}$ ideoque erit $x = \frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz - my}$; Sed si ϖ distet à linea apsidum plusquam 90 gradibus erit TL = KL − TK sive, − TK + KL, ideoque TE fiet $\frac{-nz + my}{r}$, sed cum in eo casu signum anceps litteræ f mutari debeat, statuatur non mutari illud signum litteræ f dum Luna est in eâdem quadraturâ donec in aliam quadraturam transeat, quamvis magis quam 90 gradibus ab apside discedat, mutari debebit ut fiat æquipollentia signum quantitatis $\frac{-nz + my}{r}$, quæ itaque evadet ut prius $\frac{nz - my}{r}$ ideoque fiet $x = \frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz - my}$ quotiescumque ϖ & apsis alterutra non erunt in eâdem quadraturâ, determinando signum anceps $\mp f$ ex apside cui vicinior fuit Luna cum eam quadraturam describe inc[illegible] Q. [illegible] 20. Ost.

Cor [illegible] Hic [illegible] in [illegible] [illegible]bus evadit $\frac{q^2}{r} \times 1 \pm \frac{f3z \pm my}{r} + \frac{f^2 \times}{r^2}$ [illegible] $\pm \frac{f^3 \times \overline{nz \pm my}^3}{r^6}$ signa superica litteræ f sunt adhibenda cum initium quadraturæ quam describit Luna minus distat ab Apogæo quam 90 gr. tam in consequentia quam in antecedentia, si vero magis distet ab Apogæo quam 90 gr. signa inferiora sunt adhibenda.

Signa superiora quantitatis my sunt adhibenda cum & Luna & apsis alterutra sunt in eâdem quadraturâ, signa inferiora cum Luna & apsis sunt in diversis quadraturis.

PROBL. I.

Dato Sinu & Cosinu anguli quem faciunt linea Apsidum & linea quadraturarum invenire quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis secundum directionem radii orbitæ Lunaris exercitam, tempore quo Luna orbitam suam percurrit.

Supponitur lineam Apsidum & Solem immotos manere durante illâ revolutione Lunæ; Quo posito cum retardationis Lunæ elementum inventum fuerit (Cor. 2. Theor. 8.) $\frac{2a^5 Y du}{q r^4 V} - \frac{2x^5 y^2 V du}{109.739 q r^5 V}$, loco $\frac{2rYdu}{qV}$ ponatur ejus valor $\frac{2rFdu}{Vaq} \times \frac{3y^2}{r} - r$ & loco $\frac{x}{r}$ valor ejus $\frac{q^2}{r^2} \times 1 \pm f \times \frac{nz \pm my}{r^2}$ &c. qui ad quintam dignitatem evehatur, dicatur A terminus $nz \pm my$, ea quinta dignitas erit $\frac{q^{10}}{r^{10}} \times 1 \pm \frac{5fA}{r^3} + \frac{15 f^2 A^2}{r^6} \pm \frac{35 f^3 A^3}{r^8}$; Verum observari potest, quod siquidem totidem sunt quadrantes in quibus f positivum aut negativum sumi debet, si tota revolutio Lunæ spectetur, hi termini ancipites omitti possunt, vel ab initio, hæc quinta dignitas sumi debet quasi foret $\frac{q^{10}}{r^{10}} \times 1 + \frac{15 f^2 A^2}{r^6}$

In his pagellis exponentem z loco exponentis 2 exaratum esse facilè percipiet eruditus Lector, quod monemus ne illo Typographico mendo turbetur horum intellectio.

DE MUNDI SYSTEMATE.

1,2 1.

ducatur in $1 - \frac{yy}{109.73 r^2}$ fiet $\frac{q^{10}}{109.73 r^{12}} \times \overline{109.73 r^2 - y^2 + 15 \times 109.73 \frac{f^2 A^2}{r^4} - \frac{15 f^2 y^2 A^2}{r^6}}$, Denique ducatur in $\frac{2 F du}{V a q} \times \overline{3 y^2 - r^2}$ fit $\frac{2 F q^9 du}{109.73 V a r^{12}} \times \overline{329.19 r^2 y^2 - 3 y^4 - 109.73 r^4 + r^2 y^2 + \frac{45 \times 109.73 f^2 y^2 A^2}{r^4} - \frac{15 \times 109.73 f^2 r^2 A^2}{r^4} - \frac{45 f^2 y^4 A^2}{r^6} + \frac{15 f^2 y^2 A^2}{r^4}}$ sive $\frac{2 F q^9 du}{109.73 V a r^{12}} \times \overline{330.19 r^2 y^2 - 3 y^4 - 109.73 r^4 + \frac{330.19 \times 15 f^2 y^2 A^2}{r^4} - \frac{15 \times 109.73 f^2 r^2 A^2}{r^4} - \frac{45 f^2 y^4 A^2}{r^6}}$. Loco A^2 substituatur $n^2 z^2 + m^2 y^2$, omisso termino $\pm 2 m n z y$ quia quando tota revolutio Lunæ assumitur duo sunt quadrantes in quibus Luna est cum apside, duo vero in quibus Luna cum neutrâ apside occurrit, fit tandem totum Elementum $\frac{2 F q^9 du}{109.73 V a r^{12}} \times \overline{330.19 r^2 y^2 - 3 y^4 - 109.73 r^4 + \frac{330.19 \times 15 f^2 n^2 z^2 y^2}{r^4} + \frac{330.19 \times 15 f^2 m^2 y^4}{r^4} - \frac{109.73 \times 15 f^2 r^2 n^2 z^2}{r^4} - \frac{109.37 \times 15 f^2 r^2 m^2 y^2}{r^4} - \frac{45 f^2 n^2 z^2 y^4}{r^6} - \frac{45 f^2 m^2 y^6}{r^6}}$; Cujus Integralis secundum Lemma I. calculi præcedentis pro quadrante fit $\frac{2 F q^9}{109.73 V a r} \times \overline{\frac{330.19 r^4 c}{8} - \frac{3 \times 3 r^4 c}{4 \times 6} - \frac{109.73 r^4 c}{4} + \frac{330.19 \times 15 f^2 n^2 r^4 c}{8 r^4} - \frac{330.19 \times 15 f^2 n^2 \times \frac{3}{4} r^4 c}{8 r^4} + \frac{330.19 \times 15 f^2 m^2 \times \frac{3}{4} r^4 c}{8 r^4} - \frac{109.73 \times 15 f^2 n^2 r^4 c}{4 r^4} + \frac{109.73 \times 15 f^2 n^2 r^4 c}{8 r^4} - \frac{109.73 \times 15 f^2 m^2 r^4 c}{8 r^4} - \frac{45 f^2 n^2 \times \frac{3}{4} r^4 c}{8 r^4} + \frac{45 f^2 n^2 \times \frac{3 \times 5}{4 \times 6} r^4 c}{8 r^4} - \frac{45 f^2 m^2 \times \frac{3 \times 5}{4 \times 6} r^4 c}{8 r^4}}$; Quod reductum efficit $\frac{2 F q^9 c}{109.73 V a r} \times \frac{108.48}{8} + \overline{\frac{330.19 \times 15 \times f^2 \times \overline{\frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{4} m^2}}{8 r^4} - \frac{109.73 \times 15 f^2 \overline{n^2 + m^2}}{8 r^4} - \frac{45 f^2 \times \overline{\frac{1}{8} n^2 + \frac{5}{8} m^2}}{8 r^4}}$ quod quadruplicatum efficit $\frac{F q^9 c}{109.73 V a r^8} \times \overline{108.48 + 330.19 \times 15 f^2 \times \frac{\frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{4} m^2}{r^4} - 109.73 \times 15 f^2 \times \frac{n^2 + m^2}{r^4} - 45 f^2 \times \frac{\frac{1}{8} n^2 + \frac{5}{8} m^2}{r^4}}$ sive tandem $\frac{F q^9 c}{109.73 V a r^8} \times \overline{108.48 + 136.0375 \times 15 \frac{f^2 m^2}{r^4} - 27.5575 \times \frac{15 f^2 n^2}{r^4}}$.

Cor. Si Sol & Apsis immoti non fingantur, sed supponatur eos pari passu moveri res eodem redibit, si modo hæc revolutio quâ durante nascitur hæc tardatio censeatur æqualis mensi Synodico; Quamvis autem Apsis reverâ non sequatur motum Solis, sed longe lentiùs procedat, imo in isto calculo immota censeri debeat, non tamen inde oritur error ullius momenti tam propter Eccentricitatem Orbitæ Lunaris quæ magna non est, quam propterea quod maxima pars hujus tardationis pendeat ex positione Lunæ respectu Solis, & minima sit ea pars hujus tardationis quæ per situm Lunæ respectu Apsidum determinatur.

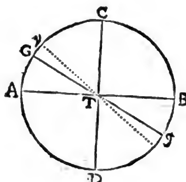
Cor. 2. Ex his terminis $\frac{F q^9 c}{109.73 V a r^8} \times \overline{108.48 + 136.0375 \times 15 \frac{f^2 m^2}{r^4} - 27.5575 \times 15 \frac{f^2 n^2}{r^4}}$ liquet quod si linea Apsidum cum linea quadraturarum consentiat, quo casu sinus m anguli quem facit linea Apsidum cum linea quadraturarum evanescit, & ejus Cosinus n fit r, hæc tardatio fit omnium minima, nempe $\frac{F q^9 c}{109.73 . V a r} \times \overline{108.48 - 27.5575 \times 15 \frac{f^2}{r^2}}$.

E con-

E contra, si linea Apsidum sit in Syzygiis ita ut m fiat r, & n evanescat, hæc expressio fit omnium maxima nempe $\frac{Fq^9c}{109.73.Var^8} \times 108.48 + 136.0375 \times 15 \frac{f^2}{r^2}$; Ideo mensis Synodicus fit minimus cum Apsides sunt in Quadraturis, longissimus vero cum Apsides sunt in Syzygiis.

Cor. 3. Hinc oritur altera æquatio Solaris Lunæ quæ secunda dicitur & pendet ex situ Apsidum, sive Apogæi respectu Solis.

121.



PROBL. II.

Posito Solem in mediocri suâ distantiâ versari & lineam Apsidum omnes possibiles positiones cum lineâ Syzygiarum successive obtinere, Invenire tardationem mediocrem Lunæ in singulâ ejus revolutione synodicâ.

Sit linea Apsidum, in ipsâ directione syzygiarum A & B, & dum Sol ab Apogæo Lunæ in consequentia movetur, & Apogæum revera est immotum, fingatur Solem immotum stare & ipsum Apogæum à Sole in antecedentia regredi; Moveatur Apogæum ex G in γ per arcum quamminimum G γ qui dicatur du tardatio Lunæ quæ fiet dum describitur G γ erit ad totam tardationem quæ fieret si apsis foret immota in G & quæ per Probl. præcedens inveniretur, ut tempus quo Apsis describit arcum G γ ad totum mensem synodicum: Dicatur ergo A tempus quo Apsidum revolutio Solis respectu absolveretur, quod in hac hypothesi est ipse annus sidereus, erit ut tota circumferentia c ad du, ita A ad tempus quo Apsis arcum du describet quod erit $\frac{A\,du}{c}$. Præterea ut mensis synodicus S ad hoc tempus $\frac{A\,du}{c}$, Ita tardatio mense synodico facta quæ est $\frac{Fq^9c}{109.73\,Var^8} \times 108.48 + 136.0375 \times 15 \frac{f^2m^2}{r^4} - 27.5575 \times 15 \frac{f^2n^2}{r^4}$; ad tardationem quæ fiet tempore $\frac{A\,du}{c}$ quæ erit itaque $\frac{AFq^9du}{S \times 109.73.V.ar^8} \times 108.48 + 136.0375 \times 15 \frac{f^2m^2}{r^4} - 27.5575 \times 15 \frac{f^2n^2}{r^4}$ (in quâ expressione m respondet quantitati y quæ in Lemmate I. praeced

tis calculi adhibetur, & u respondet quantitati z) & integretur pro quadrante juxta Coroll. 4. ejus Lemmatis habebitur

121. $$\frac{A.F.q^9}{S\times 109.73.V.ar^8}\times\frac{108.48c}{4}+\frac{136.0275\times 15f^2r^2c}{4r^4}-\frac{163.595\times 15f^2r^2c}{8r^4};$$

Quadruplicetur vero pro toto circulo fiet $\frac{AFq^9c}{S\times 109.73.Var^8}\times 108.48+\frac{813.6f^2}{r^2}$; Denique ut totum tempus A ad tempus synodicum S ita hæc tardatio ad tardationem mense synodico factam quæ erit ergo $\frac{Fq^9c}{109.73Var^8}\times 108.48+\frac{813.6f^2}{r^2}$.

PROBL. III.

Posità excentricitate orbitæ Telluris circa Solem, & orbitæ Lunæ circa Terram invenire tardationem Lunæ 1°. dum Terra describit arcum quamminimum datum, 2°. Dum describit annuam suam orbitam, 3°. durante mense synodico, 4°. dum Luna ab Aphelio suo ad mediocrem suam à Sole distantiam pervenit.

Sit a mediocris distantia Telluris à Sole, x alia quævis distantia, si F sit vis Solis in distantia a erit $\frac{aaF}{xx}$ ejus vis in distantia x; Ergo in calculo Probl. mox præcedentis quo tardationem mense synodico factam invenimus, x loco a ponatur & $\frac{aaF}{xx}$ loco F evadet tardatio $\frac{a^3Fq^9c}{109.73Vx^3r^8}\times 108.48+\frac{813.6f^2}{r^2}$, & si A sit annus sidereus, M mensis Periodicus Lunæ citra omnem Solis actionem, est $\frac{F}{V}=\frac{M^2a}{A^2r}$ (per Cor. 2. Prop. IV. Lib. I.) hinc illa tardatio evadit $\frac{M^2a^3q^9c}{109.73A^2x^3r^9}\times 108.48+\frac{813.6f^2}{r^2}$.

Sit b semi-axis minor Ellipseos quam Terra describit circa Solem, e excentricitas, k Peripheria radio a descripta, ideoque sit $\frac{1}{2}bk$ area tota Ellipseos quam Terra describit circa Solem, sit du motus angularis terræ circa Solem quam minimo tempore, area illi angulari motui respondens erit $\frac{xxdu}{2a}$ (ut constat ex calculo præcedente) ideoque ut Ellipsis tota $\frac{1}{2}bk$ ad hanc aream $\frac{xxdu}{2a}$, ita annus A, ad tempus quo arcus du describitur qui erit ergo $\frac{Axxdu}{abk}$, & ut mensis synodicus S ad id tempus ita tota tardatio ad tardationem hoc tempore quæ factam erit $\frac{AM^2a^3x^2q^9cdu}{109.73.S.A^2x^3abkr^9}\times 108.48+\frac{813.6f^2}{r^2}$ sive $\frac{M^2a^2q^9cdu}{109.73SAxbkr^9}\times 108.48+\frac{813.6f^2}{r^2}$ sed $\frac{a}{x}$ est $\frac{a^2\mp ez}{b^2}$ per Lem. 2. calculi præcedentis, hinc istud elementum evadit $\frac{M^2aq^9c\times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73.S.A\,b^3k.r^9}\times a^2du\mp ezdu$ cujus Integralis est $\frac{M^2aq^9c\times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73.S.A.b^3.kr^9}\times a^2u\mp aey$, quæ semi-circulo absoluto fit $\frac{M^2a^3q^9c\times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73S.A.b^3kr^9}\times\frac{1}{2}k$; cujus duplum est retardatio anno durante facta, estque $\frac{M^2a^3q^9c\times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73.S.A.b^3r^9}$ hinc ut A ad S ita hæc tardatio ad tardationem mense synodico factam quæ erit ergo $\frac{M^2a^3q^9c}{A^3b^3r^9}\times\frac{108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}$.

Denique, retardatio quæ convenit mediocri distantiæ à Sole, in quá u est $\frac{1}{4}k-e$, & est $y=b$, est $\frac{M^2aq^9c\times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73S.A.b^3r^3}\times\frac{1}{4}a^2-\frac{a^2e}{k}-\frac{abe}{k}$.

PROBL. IV.

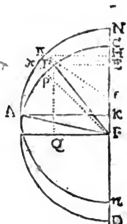
Dato tempore Synodico apparenti Lunæ invenire tempus Periodicum M quod observaretur si omnino abesset vis Solis.

Siquidem tempore M describeretur arcus c, tempore S describeretur $\frac{Sc}{M}$, tempus autem Periodicum quod tempori Synodico S respondet est $\frac{AS}{A+S}$, ideoque cum illo tempore revera describatur arcus c, tempore Synodico S describeretur $\frac{A+S}{A}c$, hinc retardatio quæ fit mense Synodico est $\frac{Sc}{M} - \frac{Ac+Sc}{A}$ sive $\frac{ASc-AMc-MSc}{AM}$, quæ inventa fuit $\frac{M^2a^3q^9c}{A^2b^3r^9} \times \frac{108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}$ unde fit æquatio ex quâ valor quantitatis M obtinebitur, fiat ut in præcedenti calculo $S=EA$ & $M=XA$, æquatio evadit $E=X+EX+X^3 \times \frac{a^3q^9}{b^3r^9} \times \frac{108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}$.

Sumatur excentricitas mediocris orbitæ Lunaris quam $.05505r$ facit Newtonus in hoc Scholio, unde is terminus $\frac{108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}$ evadit 1.0110782 est $\frac{q^9}{r^9}=9864$, est $\frac{a^3}{b^3}=1$. proximè, itaque æquatio est $E=X\times\overline{1+E}+9972X^3$, loco E substituatur .0804896, loco X substituatur $.0744+R$ & æquatio evadit $.08084896=.08082583+1.09740854R$ unde habetur $.00002313=1.09740854R$ unde obtinetur $R=.0000210$, & $M=.0744210A$; fere ut in præcedenti calculo.

PROBLEMA V.

Invenire æquationem motus medii Lunaris quæ pendet ex Solis actione & quæ adhibenda est cum Terra est in mediocri suâ distantiâ à Sole. 121.



Hoc Problema solvitur ut in præcedenti calculo, itaque ut tota Ellipsis cujus area est $\frac{1}{2}bk$ ad aream FNA (sive $\frac{bk}{8}+\frac{be}{2}$.) ita tardatio annua quæ inventa est $\frac{M^2a^3q^9c\times108.48+813.6\times\frac{f^2}{r^2}}{S.A.b^3r^9\times109.73}$, ad tardationem quæ in motu medio continetur & quæ est ideo $\frac{M^2aq^9c\times108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{S.A\,b^3r^9\times109.73}\times\frac{1}{4}a^2+\frac{a^2e}{k}$, cujus excessus supra retardationem veram Probl. III. inventam est $\frac{M^2aq^9c\times108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{S.A\,b^3r^9\times109.73}\times\frac{2a^2e+abe}{k}$ sive sumendo ab pro a^2 fit $\frac{M^2a^3q^9c}{S.A.b^3r^9}\times\frac{108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}\times\frac{3e}{k}=\frac{.9972M^2}{S,A}\times\frac{3ec}{k}$

 (per

(per Prob. IV.) eſt $\frac{3ec}{k} = 2\text{gr}.\ 9005$, eſt $\frac{M^2}{SA} = .0685042$ quod ductum in .9972 efficit .068312388, quod ductum in 2gr. 9005,
121. efficit 0°.1982 quod ductum per 60' bis efficit 11'. 52'' &c. ſed in priori calculo erat 11'. 47'', itaque medium inter hos duos valores eſt 11'. 49'', ut invenit Newtonus; cum enim Orbitæ Lunaris figura ſit admodum variabilis, & incerta ſit excentricitas quæ ipſi citra actionem Solis conveniret, non immerito ſumitur medium inter id quod prodit ex Hypotheſi orbem Lunæ eſſe circularem, & in Hypotheſi orbem Lunæ eſſe Ellipſim, cujus excentricitas eſt ea excentricitas mediocris quæ obſervatur.

PROBL. VI.

Poſitâ Excentricitate Orbitæ Lunaris, Poſito vero Solem in mediocri ſuâ diſtantiâ à Terrâ ſemper ſtare, invenire æquationem motus medii Lunæ pendentem ex vario ſitu Apogæi Lunæ reſpectu Solis.

Inventum erat in Problemate 1°. quod tota tardatio Lunæ, durante menſe Periodico, in mediocri diſtantia Terræ à Sole & in data Apſidis ad Quadraturam poſitione erat $\frac{Fq^9c}{109.73\,Var^8} \times 107.48 + \frac{136.035 \times 15f^2m^2}{r^4} - \frac{27.5575.15f^2n^2}{r^4}$, Poſito ſinum anguli lineæ Apſidum cum linea quadraturarum eſſe m, Coſinum vero anguli eſſe n, ſive quod eodem redit ſinum diſtantiæ Apſidis à Syzygia eſſe n, ejus Coſinum eſſe m; Præterea inventum erat quod ſi linea Apſidum omnes poſſibiles poſitiones cum linea Syzygiarum aſſumat, tota tardatio quæ eo tempore fit eſt $\frac{AFq^9c}{S\times109.73\times Var^8} \times 108.48 + \frac{813.6f^2}{r^2}$; Hinc ſi linea apſidum diſcedat à Syzygia arcu u, & fingatur retardationem eſſe proportionaliter tempori diſtributam, fiet ut tota Peripheria c ad eum arcum u, ita tota tardatio facta dum Peripheria deſcribitur quæ eſt $\frac{AFq^9c}{S\times109.73\times Var^8} \times 108.48 + \frac{813.f^2}{r^2}$ ad tardationem mediam huic tempori proportionalem quæ erit $\frac{AFq^9u}{S\times109.73\times Var^8} \times 108.48 + \frac{813.6f^2}{r^2}$, ſed cum Elementum tardationis (eodem Probl. 2°.) repertum ſit $\frac{AFq^9du}{S.\ 109.73\times Var^8} \times 108.48 + \frac{136.0375\times15f^2m^2 - 27.5575\times15f^2n^2}{r^4}$. Integralis ejus ſumatur per Lemma I. calculi præcedentis, loco m ponendo z & loco n ponendo y, & Integralis erit $\frac{AFq^9}{S\times109.73\times Var^8} \times 108.48u + \frac{136.0375\times15f^2\times APET - 27.5575\times15f^2 AFQ}{r^3}$ quæ quantitas ſi ſubtrahatur ex præcedenti, æquatio in data diſtantia u Apogæi à Sole in Antecedentia, vel Solis ab Apogæo in conſequentia erit $\frac{AFq^9f^2}{S\times109.73\,Var^8} \times$ 813.6ru-136.0375×15APET+27.5575×15APQ eſt autem APET=APQ+2PQT, eſt ru= 2APT=2APQ+2PQT, quibus valoribus ſubſtitutis, diviſoque primo termino 813.6 per 15 æquatio evadit $\frac{15AFq^9f^2}{109.73\times S.\ V.\ ar^8} \times$ 108.48 APQ + 108.48 PQT − 136.0375 APQ − 272.075 PQT + 27.5575 APQ, & reductione facta ſit $\frac{15A\times Fq^9f^2}{109.73\times S.\ V.\ ar^8} \times -163.595$ PQT.

Hæc æquatio negativa eſt cum Apogæum

gæum Lunæ ex A in C à Syzygiâ ad quadraturam procedit, in Quadratura evanescit, nam PQT in Quadratura fit zero: Si Apsis ex C in syzygiam B pergat, fit APET=APQ−2PQT, est $r u$=2APT=2AQP−2PQT, quibus valoribus in æquatione substitutis quantitas − 163.595 + QT ex negativâ positiva fit, rursus fit negativa cum ex syzygiâ B ad quadraturam D Apogæum pergit, positiva iterum ex D in A; evanescit vero in omnibus punctis syzygiarum & quadraturarum.

Cor. 1. Ex Trigonometriâ notum est quod sinus arcus dupli alterius arcus est duplum facti sinus arcus simpli per ejus Cosinum divisum per Radium; ideoque constat quod sinus arcus dupli alterius arcus est semper ut factum arcus simpli per ipsius Cosinum; sed areæ QPT duplum, nempe area TQPE, est ipsum factum sinus QP arcus AP per ejus Cosinum TQ, ergo area QPT est ut sinus arcus dupli arcus AP, Æquatio autem inventa est ubique ut area illa PQT siquidem constat ex facto illius areæ per constantes ductæ; Ergo æquatio proposita est ubique ut sinus arcus dupli Distantiæ Apogæi Lunæ à Syzygiâ.

Cor. 2. Hinc etiam sequitur illam æquationem evanescere in syzygiis & Quadraturis, iis enim in punctis Luna distat à syzygiâ vel 90gr vel 180gr. vel 270 vel 360, quorum arcuum duplum est 180, 360, 540, 720, quorum arcuum sinus sunt zero.

Cor. 3. Hinc etiam sequitur hanc æquationem esse maximam in Octantibus tunc enim cum Apogæum distet à syzygia vel 45. gr. vel 135 vel 225 vel 315 quorum dupli sunt, 90 gr 270, 450, 630 &c. & horum arcuum sinus fit Radius qui omnium sinuum maximus est sequitur æquationem istis sinibus proportionatam hic loci esse maximam.

Cor. 4. In Octantibus hæc area PQT est $\frac{1}{2}r^2$, ut notum est, hinc ista Æquatio evadit $\frac{40.449375 \times 15 AF q^9 f^2}{109.73 S. V \times a r^9}$, loco $\frac{F}{V}$ ponatur $\frac{M^2 a}{A^2 r}$ est $f^2 = 0030305 r^2$; est $\frac{q^9}{r^9} = .9864$.

tota quantitas fit

$$\frac{40.449375 \times 15 \times .0029892 8 r \times A M^2}{109.73. S. A^2} =,$$

sed inventum est quod est $\frac{M^2}{SA} = .0685042$, & est $\frac{40.449375 \times 15}{109.73} = 5.52939$, hinc tota æquatio est .001297456 r, sed r est æqualis arcui 57 gr. 29. &c. hinc æquatio est graduum .063723125 &c. quod ductum per 60 efficit 3'.82338, & .82338 ductum per 60, efficit 49''. 4, Ita ut tota æquatio sit 3'.49''. &c. 121.

Cor. 5. Newtonus non tradit quantitatem hujus Æquationis qualem illam ex calculis invenit, sed ait ille, *Hæc æquatio quam semestrem vocabo in Octantibus Apogæi quando maxima est ascendit ad 3' 45'' circiter quantum ex Phænomenis colligere potui. Hæc est ejus quantitas in mediocri Solis distantia a Terra.* Scilicet in Hypothesibus nostris Apsidem & terram immotam assumpsimus, cum id revera non fit, ideoque, si concedatur nos attigisse verum Newtoni calculum, æquatio per calculum inventa non plane eadem erit cum vera, parum tamen admodum ab illa differet; cæterum omnes æquationis veræ Leges ex iis quæ per istum calculum obtinentur meritò deducentur, & ex ipsæ sunt quæ in præcedentibus Coroll. sunt constitutæ, sed absoluta æquationis quantitas ex observatione non ex calculo est petenda, differunt autem calculus & rei veritas 3'' duntaxat quod Theoriæ præstantiam sufficienter probat.

De Æquatione motus Lunaris semestri secunda quæ pendet ex positione lineæ Nodorum respectu lineæ Syzygiarum.

Ex inclinatione orbitæ Lunaris ad planum Eclipticæ fit ut pars actionis Solis consumatur in ipso plano orbitæ Lunari ad Planum Eclipticæ admovendo, si ... tota non occupetur, ut hactenus ... situm fuerat in distrahendo Lunam a ... ræ centro aut illam ad id attrahendo, aut alio modo Lunam in proprio ejus Plano accelerando aut retardando. Hinc æquationes prius inventæ novâ correctione indigent.

PRO-

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.

PROBL. I.

Invenire partem actionis Solis quæ Lunam secundum radium ejus orbitæ trahit, sublatâ eâ parte actionis Solis quæ consumitur in ipso plano orbitæ Lunaris dimovendo.

Sit ATB linea Syzygiarum in Eclipticæ plano; NTn linea nodorum; P locus Lunæ in propria orbita; PL, LM directiones virium in quas resolvitur vis Solis, quarum PL est parallela TM & LM Parallela radio TP.

Ducatur ex M in planum orbitæ Lunaris productum perpendicularis Mm, ducatur in plano orbitæ Lunaris linea Tm, & ex M & m ducantur perpendiculares MH, mH in lineam nodorum Nn productam.

Radius TP dicatur r ut prius, Distantiæ Lunæ à Quadratura sinus PK dicatur y, Cosinus TK dicatur z; Distantiæ nodorum à Syzygia sinus NQ sit n, Cosi- TQ sit m; Denique sinus Inclinatio- rbitæ Lunaris ad Eclipticam dica- , existente r radio, & ea inclina- constans supponatur, quæ secundum Keplerum, De la Hirium &c. est ubi maxima, graduum 5. 19. 30.

Ex demonstratis est TM $= 3y$; & propter similitudinem Triangulorum NTQ, MTH, est NT (r) : MT $(3y)$ :: NQ (n) : MH $\left(\frac{3yn}{r}\right)$, & quia angulus MHm est angulus inclinationis orbitæ Lunaris ad Eclipticam, ut $r : l$ :: MH $\left(\frac{3yn}{r}\right)$: Mm $= \frac{3ynl}{r^2}$; Denique ut est TM $(3y)$ ad Mm $\left(\frac{3ynl}{r^2}\right)$ sic est r ad sinum anguli MTm qui erit ergo $\frac{nl}{r}$, cujusque Cosinus erit $\sqrt{r^2 - \frac{n^2l^2}{r^2}}$ sive $r - \frac{n^2l^2}{2r^3}$.

Jam autem tota vis TM est ad eam ejus partem quæ agit secundum planum orbitæ Lunaris ut radius ad Cosinum anguli MTm sive ut r ad $r - \frac{n^2l^2}{2r^3}$ & in eâdem proportione minuuntur partes in quas resolvitur ea vis, ergo cum portio totius vis TM secundum directionem radii exercita (si Planum orbitæ Lunaris & Eclipticæ idem fuissent) sit $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r}$ ex superiùs demonstratis; Pars residua propter inclinationem Plani erit $\frac{F}{a} \times \overline{\frac{3yy}{r} - \frac{3y^2n^2l^2}{2r^5}}$; Vis autem LM quæ est $\frac{F}{a}\ r$ & negativè sumitur, nullam diminutionem patitur ex hâc plani inclinatione, quippe PT est in ipsâ orbitâ Lunari, ideoque ejus planum quomodocumque situm non dimovet; Hinc ergo pars actionis Solis quæ Lunam secundum radium ejus orbitæ trahit, subla-

tâ eâ parte quæ consumitur in plano orbitæ dimovendo est $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r - \frac{3y^2n^2l^2}{2r^5}$.

PROBL. II.

Dato sinu anguli quem faciunt lineæ Nodorum & Syzygiarum invenire quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis secundùm directionem radii orbitæ Lunaris exercitam, semotâ eâ ejus actionis parte quæ in dimovendo plano orbitæ Lunaris exercetur.

Elementum retardationis Lunæ (Probl. 1. calculi prioris) inventum erat $\frac{2Ydu}{V}$, loco Y ponatur ejus valor Probl. præcedente inventus $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r - \frac{3y^2n^2l^2}{2r^5}$; si, quia jam actum est de retardatione per vim $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$ productâ, adhibeatur solummodo quantitas $\frac{F}{a} \times -\frac{3y^2n^2l^2}{2r^5}$ (quæ cum negativa sit ex retardatione fit acceleratio) hinc, accelerationis ex hâc causâ pendentis Elementum est $\frac{2Fdu}{Va} \times \frac{3y^2n^2l^2}{2r^5}$, cujus Integralis pro quadrante est $\frac{Fn^2l^2}{Var^5} \times \frac{3r^2c}{8}$ & quadruplicatum pro revolutione integrâ fit $\frac{3Fn^2l^2c}{2Var^3}$. Unde liquet quod cum linea nodorum est in ipsâ lineâ Syzygiarum quo casu n evanescit, tunc motus Lunæ est ipse ille qui præcedentibus Theoriis fuit inventus, quando vero linea nodorum est in lineâ syzygiarum tunc est $n = r$, & est acceleratio $\frac{3Fl^2c}{2Var}$ quæ tum maxima est.

PROBL. III.

Posito Solem in mediocri suâ distantiâ versari, & lineam Nodorum omnes possibiles positiones cum lineâ Syzygiarum successivè obtinere, Invenire æquationem motus medii Lunæ pendentem ex vario situ nodorum Lunæ.

Primò ut inveniatur acceleratio mediocris quæ ex inclinatione plani Lunaris oritur, fingatur Solem immotum stare & lineam Nodorum ab eo recedere in Antecedentia (nodorum autem motum proprium hic omittere licet, cum in Problemate præcedente omissus sit, sic enim utraque omissio sese compensant.) 121.

Moveatur Nodus ex N per arcum du, acceleratio Lunæ quæ fiet dum describitur du erit ad accelerationem toto mense factam, ut tempus quo Nodus describit arcum du ad totum mensem, sed tempus quo nodus describit arcum du est $\frac{Adu}{c}$, nam ut tota Peripheria c ad arcum du ita annus sidereus A ad tempus quo arcus du describitur, quod erit ergo $\frac{Adu}{c}$, ergo ut mensis synodicus S, ad hoc tempus $\frac{Adu}{c}$, ita acceleratio uno mense factâ quæ inventa est $\frac{3Fl^2n^2c}{2Var^3}$ ad $\frac{3AFl^2n^2du}{2S.V.ar^3}$. Integretur pro quadrante & erit $\frac{3AFl^2r^2c}{2\times 8S.Var^3}$ quadruplicetur pro totâ revolutione fiet $\frac{3AFl^2c}{4SVar}$, & hæc erit acceleratio motus medii Lunæ propter orbitæ inclinationem.

Hinc si linea nodorum discedat à lineâ syzygiarum arcu u, & fingatur totam accelerationem proportionaliter tempori distribui, fiat ut tota Peripheria c ad eum arcum u, ita tota tardatio $\frac{3AFl^2c}{4S.Var}$, ad accelerationem huic tempori proportionalem quæ erit $\frac{3AFl^2u}{4S.V.ar}$ sive $\frac{3AFl^2}{2S.Var^2} \times \frac{ru}{2}$. Sed Integralis elementi $\frac{3AFl^2n^2du}{2SVar^3}$ quando arcus NA est u, est $\frac{3AFl^2 \times ANQ}{2.S.V.ar^2}$ (ex Lem. I. calc. 1.) hæc ergo quantitas ex præcedenti substracta dat æquationem sive differentiam accelerationis mediæ & accelerationis veræ

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.

veræ, quæ æquatio erit ergo $\frac{3AFl^2}{2SVar^2} \times \frac{rn}{2}$ $-ANQ$ sed $\frac{rn}{2} - ANQ$ est Triangulum NQT, & est $NQT = \frac{nm}{2} = \frac{2nm}{4}$; Hinc æquatio proposita sive Excessus accelerationis mediæ super veram est $\frac{3AFl^2}{8S.Var} \times \frac{2nm}{r}$, quæ est quantitas quâ minuendus est motus medius Lunæ ut ejus locus verior habeatur.

Cor. Hinc cum quantitates $\frac{3AFl^2}{8S.Var}$ sint constantes & $\frac{2nm}{r}$ sit sinus arcus dupli distantiæ nodi à syzygiâ, æquatio est ubique ut sinus arcus dupli distantiæ nodi à syzygiâ. ergo evanescit in syzygiis & Quadraturis; Maxima est in Octantibus, cumque sit illic $m = n = r\sqrt{\frac{1}{2}}$, est $\frac{2nm}{r} = r$: loco $\frac{F}{V}$ ponatur $\frac{M^2a}{A^2r}$, æquatio in Octantibus sit $\frac{3M^2l^2}{8S.Ar}$, sed cum Inclinatio sit 5 gr. $19\frac{1}{2}'$ cujus sinus l est $.9281r$, ideoque $\frac{l^2}{r}$ est $.00863r$, & $\frac{3l^2}{8r} = .00325$, cum vero $\frac{M^2}{S.A}$ (per Prob. V. calc. præc.) sit. 0685, hinc æquatio evadit in Octantibus $.000221r$; Denique est $r = 57^{g}.29$, quod ad secundas reductum efficit $206264''$, & ductum per $.000223$ efficit $45''.6$, quam Newtonus $47''$ per Theoriam gravitatis se invenisse profitetur.

DE MOTU APSIDUM.

Newtonus Sectione XI. Lib. I. Princ. ingeniosissimam excogitavit rationem motum Apsidum ad calculum revocandi, fingendo nempe vim externam Solis posse conferri cum vi quæ ex revolutione plani ipsius orbitæ Lunaris oriretur, sicque inveniri curvam per motum corporis in Ellipsi mobili genitam quæ eadem foret cum eâ quæ per vis extraneæ adjunctionem nasceretur; Eidem Methodo mox insistemus & ex eâ Leges motûs Apsidum derivantur accuratissime quales illas Newtonus statuit; sed fatendum ipsam absolutam ejus motus quantitatem dimidio circiter minorem inveniri illâ quæ per observationes innotescit; Itaque aliam indicare Methodum rem eamdem æstimandi priori illâ non omissâ, inopportunum visum non est.

PROBL. I.

Sol supponatur immotus; Linea Apsidum qualemcumque Angulum cum lineâ quadraturarum efficiat, ejusque anguli sinus sit y; In-

Invenire motum Apogæi dum Luna ab Apogæo ad Apogæum redit.

Sit G A g Ellipsis quam Luna circa Terram T describit; sit G Apogæum, g Perigæum; dicatur r semi-axis major; T distantia Apogæa; $T - 2f$ distantia Perigæa. Centro T describatur circulus radio r, eum circulum Luna describeret eodem tempore quo Ellipsim suam describit, & Vis Centralis Terræ in Lunam in eodem circulo revolventem foret $\frac{du^2}{2r}$ ex notâ circuli proprietate.

Portiones du ejus circuli ubique æquales intelligantur, & sumantur in Ellipsi arcus terminati per lineas e centro T per utrumque extremum arcus illius du ductas; liquet, quod dum arcus illi Elliptici describentur, lineolæ per quas Luna ex Tangente ad Ellipsin reducetur erunt effectus vis centralis Terræ & vis Solis secundum directionem radii orbitæ Lunaris conjunctis vel oppositis actionibus Lunam trahentium.

Lineolæ autem propter vim centralem terræ descriptæ erunt ubique, primò in ratione ipsius vis centralis, sive inversè ut quadrata distantiarum à centro, ideoque in distantia X erunt $\frac{r^2 du^2}{2rX^2}$; & secundò ut quadrata temporum sive ut quadrata arearum Ellipseos quæ respondent arcubus æqualibus du; illæ vero areæ cum sint inter se similes (ob æquales angulos in T arcubus æqualibus du mensuratos) erunt ut X^2, ideoque tempora erunt ut X^2 eorumque quadrata ut X^4; Ideoque vis centralis Terræ effectus dum describitur area quæ respondet arcui du erit ubique $\frac{r^2du^2}{2rX^2} \times \frac{X^4}{r^4}$ sive $\frac{X^2du^2}{2r^3}$. In Apogæo erit $\frac{T^2du^2}{2r^3}$ in Perigæo $\frac{T^2du^2}{2r^3} - \frac{4Tfdu^2}{2r^3}$ &c.

Vis Solis in Lunam agens secundum directionem radii orbitæ Lunaris dicatur Y in mediocri distantiâ, & quia crescit ut distantiæ, in distantiâ X fit $\frac{X}{r}$ Y, ejus verò effectus crescit ut quadrata temporum, ideoque per ea quæ dicta sunt, effectus ejus vis dum describitur area quæ respondet arcui du est $\frac{X}{r} \times Y \times \frac{X^4}{r^4}$ sive $\frac{X^5}{r^5}$ Y, in Apogæo erit $\frac{T^5}{r^5}$ Y, in Perigæo $\frac{T^5}{r^5}$ Y $- \frac{10T^4f}{r^5}$ Y &c.

Sit, ut prius, F vis Solis in Terram in ejus mediocri distantiâ à Terra a, inventum est vim Y esse $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$, & vim Lunæ in mediocri distantia esse ad vim Solis F ut A^2r ad M^2a (A ut prius est annus sidereus, M mensis Periodicus, sed sepositâ Solis actione) cum ergo effectus vis Terræ in Lunam in mediocri distantiâ dum describitur area $\frac{rdu}{2}$ sit $\frac{du^2}{2r}$, si fiat ut A^2r ad M^2a ita $\frac{du^2}{2r}$ ad quartum qui erit $\frac{M^2a}{A^2r} \times \frac{du^2}{2r}$, is terminus erit effectus vis Solis quæ per F exprimitur, sicque effectus vis Y in mediocri distantia dum describitur area $\frac{rdu}{2}$ erit $\frac{M^2}{A^2r} \times \frac{du^2}{2r} \times \frac{3yy}{r} - r$, & in qualicumque distantiâ X erit $\frac{X^5}{r^5} \times \frac{M^2}{A^2r} \times \frac{du^2}{2r} \times \frac{3yy}{r} - r$.

Hinc fluxio secunda orbitæ Lunaris, hoc est, lineola ad Terram directa, intercepta inter Tangentem & curvam Lu-

De Mundi Systemate.

121.

narem quæ est differentia (vel summa) effectuum vis Centralis Terræ & vis Solis in Lunam dum arcus respondens arcui du percurritur erit ubique $\frac{du^2}{2r} \times \frac{X^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{X^5}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}$.

Hæc fluxio in Apogæo erit $\frac{du^2}{2r} \times \frac{T^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}$; In Perigæo vero erit $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \overline{\frac{T^5}{r^5} - \frac{10T^4 f}{r^5}} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}}$; Ubi notandum quod si Sol immotus fingatur, (ut in hyp. Problem. assumitur) & si Perigæum esset è Diametro oppositum Apogæo tunc quantitas $\frac{3yy}{r} - r$ eadem absolutè foret tam in Apogæo quam in Perigæo.

Si conciperetur quod effectu virium existente in Apogæo $\frac{du^2}{2r} \times \frac{T^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} \times \frac{3yy}{r} - r$ vera Ellipsis describeretur, hic effectus virium in Apogæo deberet esse ad earum effectum in Perigæo, primo inversè ut quadrata distantiarum, secundo directe ut quadrata temporum sive ut quartæ dignitates distantiarum, unde illi effectus erunt ut quadrata distantiarum directe hoc est ut T^2 ad $T^2 - 4Tf$, dividatur ergo effectus virium in Apogæo per T^2 & ducatur in $T^2 - 4Tf$ effectus virium in Perigæo esse deberet $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \overline{\frac{T^5}{r^5} - \frac{4T^4 f}{r^5}} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}}$: Sed in Perigæo ut & in Apogæo ex naturâ Apsidum evanescit fluxio distantiæ X utpote maximæ vel minimæ, ejus autem fluxionis fluxio est is ipse effectus Virium Terræ & Solis, ideo fluens hujus effectus virium reverà evanesceret, itaque ex ipsis hypothesibus oportebit ut $\int \frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \overline{\frac{T^5}{r^5} - \frac{4T^4 f}{r^5}} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}} = 0$; Sed in Perigæo, spectatâ actione Terræ & Solis, fluxio secunda reperta erat $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \overline{\frac{T^5}{r^5} - \frac{10T^4 f}{r^5}} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}}$. Itaque excedit eam quantitatem cujus fluens evadit zero quantitate $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{6T^4 f}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}}$.

Punctum itaque Perigæi non erit in puncto è Diametro opposito Apogæo, sed arcu quodam differet, quem obtinemus quærendo quonam in loco orbitæ Lunaris fluens fluxionis secundæ ejus curvæ evanescat. Observandum autem, quod distantiæ Lunæ à Terrâ, circa puncta Apogæi vel Perigæi non multum mutantur, ideoque si Perigæum arcu p transferatur non magna mutatio exinde orietur in effectu vis centralis terræ, sed sinus y qui occurrit in valore vis Solis evadet, $y + \frac{zp}{r}$ (sumpto z pro cosinu arcus cujus sinus est y, est enim $dy = \frac{z\,du}{r}$ per naturam circuli, cùm hic verò agatur de arcu p non magno, potest poni p loco du, & differentia sinuum pro dy) fiet itaque fluxio secunda orbitæ Lunaris in loco in quo Perigæum esse debebit $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \overline{\frac{T^5}{r^5} - \frac{10T^4 f}{r^5}} \times \overline{\frac{3yy + \frac{6yzp}{r} + \frac{3z^2p^2}{r^2}}{r} - r}}$; cujus pars $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \overline{\frac{T^5}{r^5} - \frac{4T^4 f}{r^5}} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}}$, Fluentem habet æqualem zero; Fluens autem excessus $\frac{du^2}{2r} \times \frac{M^2}{A^2 r} \times -\frac{T^5}{r^5} \times \frac{6yzp}{r^2} + \frac{6T^4 f}{r^5} \times \frac{3yy}{r} - r$ fiat æqualis zero (omissis terminis in quibus f aut p ad duas dimensiones assurgunt) & habebitur valor p, quâtenus designat arcum quo processit Perigæum, siquidem tota fluens fluxionis secundæ orbitæ Lunaris in eo puncto fiet zero.

Hinc itaque divisis terminis per quantitatem communem $\frac{6M^2T^4du}{2Ar^8}$ habetur

hæc

hæc Æquatio $T\,p \times \int \frac{yzdu}{r} = f \times \int \overline{3yydu - rrdu}$, sive quia $ydu = -rdz$ fit $T\,p \times \int -zdz = f \times \int \overline{-3rydz - r^2du}$. Est autem $\int -zdz = \frac{1}{2}rr - \frac{1}{2}zz$ & $\int -ydz$ segmentum circulare cujus ordinata est y, sive sector circularis $\frac{1}{2}ru$, dempto vel assumpto Triangulo cujus area est $\frac{1}{2}yz$; Hinc æquatio evadit $\frac{1}{2}T\,p \times rr - zz = f \times \frac{3}{2}r^2u - \frac{3}{2}ryz - r^2u$, sive $T\,p \times yy = f \times r^2u - 3ryz$, unde tandem habetur $p = \frac{rf}{T} \times \frac{ru - 3yz}{yy}$.

Atque cum hic sit motus Perigæi quo tempore Luna fertur ab Apogæo ad Perigæum erit motus Apsidis durante unâ revolutione Lunæ ab Apogæo ad Apogæum $\frac{2fr}{T} \times \frac{ru - 3yz}{yy}$.

Cor. 1. Hinc motus Apsidum nullus est cum $ru - 3yz = 0$; in Quadraturis verò fit negativus regrediuntur itaque Apsides; maximus autem est in syzygiis & positivus, tunc enim evanescit quantitas negativa $3yz$, fit $u = \frac{1}{4}c$, & $y = r$, unde ille motus fit $\frac{fc}{2T}$ durante unâ revolutione Lunæ.

Cor. 2. Si hunc calculum accuratius instituere liceret, attendi posset ad motum Solis dum Luna ab Apogæo ad Perigæum movetur, promovetur enim interim Sol 13 circiter gradibus, itaque etsi Luna veram describeret Ellipsim, Perigæum non faceret cum quadratura eumdem angulum quem faciebat Apogæum, sed 13 gradibus minus distaret in consequentia. Sed instituto calculo invenimus parum admodum exinde mutari motum Perigæi in propriâ orbitâ, ita ut ad institutum nostrum sufficiat illum assumere qualis per Problema repertus est.

PROBL. II.

Invenire quantitatem motus Apsidum singulo anno.

Sit Apogæum in quadraturâ, & Sole procedente Apogæum inde versus Syzygiam recedat.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

Dicatur α tempus quo Sol revolutionem respectu Apogæi Lunæ absolvit, dicatur π tempus quo Luna ab Apogæo ad Apogæum redit, sit c tota Peripheria quam Sol Apogæi respectu describit, & du arcus ejus exiguus quo Apogæum à quadraturâ recessisse censebitur propter Solis motum, tempus quo hunc arcum descripserit erit $\frac{\alpha du}{c}$, & cum tempore π, Apogæum moveatur quantitate $\frac{2fr}{T.yy} \times ru - 3yz$ tempore $\frac{\alpha du}{c}$ procedet quantitate $\frac{2\alpha fr}{\pi.Tc} \times \frac{rudu}{y^2} - \frac{3yzdu}{y^2}$, erit autem u arcus qui metitur distantiam Apogæi à quadraturâ, y ejus sinus, & z ejus Cosinus, & $du = \frac{rdy}{z}$ hinc quantitas $\frac{2\alpha fr}{\pi.T.c} \times \frac{rudu}{y^2} - \frac{3zydu}{y^2}$, fit $\frac{2\alpha fr}{\pi.T.c} \times \frac{rudu}{y^2} - \frac{3rdy}{y}$. Ut habeatur fluens quantitatis $\frac{rudu}{y^2}$, ponatur loco u ejus valor $y + \frac{y^3}{6rr} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6} + \frac{35y^9}{1152r^8} + \frac{63y^{11}}{2816r^{10}}$ &c. fiet $\frac{rudu}{yy} = \frac{rdu}{y} + \frac{ydu}{6r} + \frac{3y^3du}{40r^3} + \frac{5y^5du}{112r^6}$ + &c. & dividendo rdu per valorem y, qui est $u - \frac{u^3}{6rr} + \frac{u^5}{120r^4} - \frac{u^7}{5040r^6}$ est $\frac{rdu}{y} = \frac{rdu}{u} + \frac{udu}{6r} + \frac{7u^3du}{360r^3} + \frac{31u^5du}{15120r^5}$; & loco ydu in sequentibus terminis ponendo $-rdz$ & loco y^2 ejusque dignitatum ponendo $r^2 - z^2$ ejusque dignitates, fit $\frac{rudu}{yy} = \frac{rdu}{u} + \frac{udu}{6r} + \frac{7u^3du}{360r^3}$ &c. $- \frac{rdz}{6r} + \frac{3}{40} \times \frac{\overline{rr-zz} \times -rdz}{r^3} + \frac{5}{112} \times \frac{\overline{rr-zz}^2 \times -rdz}{r^6} + \frac{35}{1152} \cdot \frac{\overline{rr-zz}^3 \times -rdz}{r^8} + \frac{63}{2816} \times \frac{\overline{rr-zz}^4 \times -rdz}{r^{10}}$ &c. Cujus quantitatis

121.

DE MUNDI SYSTEMATE.

fluens est $r\,\mathrm{L}.\,u + \frac{u^2}{12r} + \frac{7u^4}{1440r^3}$ &c. $+$
121. $\frac{rr-rz}{6r} + \frac{3}{40} \times \frac{\frac{2}{3}r^4 - r^3z + \frac{1}{3}rz^3}{r^3} + \frac{5}{112}$
$\times \frac{\frac{8}{15}r^6 - r^5z + \frac{2}{3}r^3z^3 - \frac{1}{5}rz^5}{r^5} + \frac{35}{1152} \times$
$\frac{\frac{16}{35}r^8 - r^7z + r^5z^3 - \frac{3}{5}r^3z^5 + \frac{1}{7}rz^7}{r^7} + \frac{63}{1616} \times$
$\frac{\frac{128}{315}r^{10} - r^9z + \frac{4}{3}r^7z^3 - \frac{6}{5}r^5z^5 + \frac{4}{7}r^3z^7 - \frac{1}{9}rz^9}{r^9}$
cui fluenti si adjungatur fluens quantitatis $-\frac{3rdy}{y}$ quæ est $-3r\,\mathrm{L}.\,y$ & omne ducatur per $\frac{2afr}{\pi \mathrm{T}c}$ habetur motus Apogæi dum propter Solis motum Apsis recessit à quadraturâ arcu u.

Si ergo u sit quadrans, y erit r, & z fiet zero unde hæc expressio evadet $\frac{2\alpha fr}{\pi \mathrm{T}c}$ $\times r\,\mathrm{L}.\,\frac{1}{4}c + \frac{\frac{1}{16}c^2}{12r} + \frac{\frac{7}{256}c^4}{1440r^3}$ &c. $+$ $\frac{r}{6} + \frac{3}{40} \times \frac{2}{3}r + \frac{5}{112} \times \frac{8}{15}r + \frac{35}{1152} \times \frac{16}{35}r$ $+$ &c. $- 3r\,\mathrm{L}.\,r = \frac{2\alpha fr^2}{\pi.\mathrm{T}c} \times \mathrm{L}.\,\frac{\frac{1}{4}c}{r^4} + \frac{c^2}{192r^2}$ $+ \frac{7c^4}{368640r^4} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{8.9}$ $+ \frac{1}{10 \times 11}$ &c. harum fractionum $\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5}$ &c. summa variis modis haberi potest, & quidem liquet oriri istos terminos ex terminis seriei quæ excessum quadrantis supra radium exprimit cum radius est Unitas, cujus seriei quinque priores termini efficiunt .33905, residui .23174; hinc cum quinque primi termini hic assumpti evadant propter fractiones per quas ducuntur .26343, & sequentes per fractiones minores quam $\frac{1}{3}$ ducantur, ii omnes sequentes simul sumpti non efficient $\frac{.23174}{3}$ sive .07724, id itaque addatur ad .26343, erit .34067 numerus major quæsito, & .26343 numerus quæsito minor, assumatur medium .30205 quantitas proposita evadit $\frac{2\alpha f}{\pi \mathrm{T}c} \times \mathrm{L}\,\frac{1}{4}c +$ $\frac{c^2}{192} + .30205$.

Si verò dicatur g excessus quadrantis super Radium, per naturam Logarithmorum fiet $\mathrm{L}.\,\frac{1}{4}c = g - \frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{3}g^3 - \frac{1}{4}g^4$ $+$ &c. $= .57079 - .16290 + .06196$ $- .02652 + .01211 - .00576 = .4496$, unde expressio inventa fit $\frac{2\alpha f}{\pi \mathrm{T}c} \times .4496r^2 +$ $\frac{c^2}{192} + .30205r^2 = \frac{2\alpha f}{\pi \mathrm{T}} \times .75165r^2$ $+ \frac{c}{192} = \frac{\alpha f}{\pi \mathrm{T}} \times \frac{1.5033r^2}{c} + \frac{c}{96}$, sive quia est $\frac{c}{96} = 3^{sr}.75$, & $\frac{r^2}{c} =$ $\frac{r}{6.28.188} = 9^{sr}.1189$ & $\frac{1.5r^2}{c} = 13^{sr}.6783$, habetur motus Apogæi durante quadrante $\frac{f}{\mathrm{T}} \times \frac{\alpha}{\pi} \times 17^{sr}.4283$ & durante totâ revo- $\frac{f}{\mathrm{T}} \times \frac{\alpha}{\pi} \times 69^{sr}.7132$, sed ut totum tempus α qualecumque sit, ad tempus annuum A, ita motus $\frac{f}{\mathrm{T}} \times \frac{\alpha}{\pi} \times 69^{sr}.7132$ ad motum annuo tempore factum qui erit $\frac{f}{\mathrm{T}} \times \frac{\mathrm{A}}{\varpi} \times 69^{sr}.7132$; Præterea sit P mensis Periodicus Lunæ fiatque ut A ad P ita $\frac{f}{\mathrm{T}} \times \frac{\mathrm{A}}{\varpi} \times 69^{sr}.7132$ ad motum Apsidum tempore Periodico Lunæ, qui erit $\frac{f}{\mathrm{T}} \times \frac{\mathrm{P}}{\varpi} \times 69^{sr}.7132$, & ut P ad ϖ ita $\frac{f}{\mathrm{T}} \times \frac{\mathrm{P}}{\varpi} \times 69^{sr}.7132$, ad motum Apsidum mense Anomalistico ϖ qui erit $\frac{f}{\mathrm{T}} 69^{sr}.7132$, & ut 360 ad $360 + \frac{f}{\mathrm{T}} \times 69^{sr}.7132$ ita P ad mensem Anomalisticum ϖ qui ergo erit $\mathrm{P} \times 1 + \frac{f}{\mathrm{T}} \times \frac{69^{sr}.7132}{360}$; Ideoque motus annuus Apogæi erit
$\frac{f}{\mathrm{T}} \times \frac{\mathrm{A} \times 69.7132}{\mathrm{P} \times 1 + \frac{f}{\mathrm{T}} \times \frac{69.7132}{360}}$, sed annus Tro-

picus

picus est $13\frac{1}{3}$ P proxime, hinc motus Apogæi fit $\frac{f}{T} \times \frac{13\frac{1}{3} \times 69.7132}{1+\frac{f}{T} \times \frac{69.7132}{360}}$.

Excentricitas f orbitæ Lunaris est quidem variabilis, de ejus legibus posthac; Excentricitatis valorem mediocrem assumit Newtonus .05505 si Radius sit 1, Ill. Cassinus eam paulo minorem facit nempe 05430; ex Legibus autem variationis excentricitatis patebit quod loco f scribi debet .05147 & loco T, 1.05147 unde motus Apsidum fiet

$$\frac{.04895 \times 13\frac{1}{3} \times 69^{r}.7132}{1+\frac{.04895 \times 69.7132}{360}} = \frac{45^{r}.4997}{1.0126} = 44.9$$

circiter; qui quidem motus invenitur per observationes 40^{r}.

DE MOTU APSIDUM

Secundum Newtoni methodum.

Hic revocanda sunt ea quæ in Sectione IX. Lib. I. dicta sunt de motu corporum in orbibus mobilibus.

LEMMA I. Prop. XLIV. Lib. I.

Concipiatur planum Orbitæ alicujus uniformiter revolvi, dum corpus quoddam ipsam orbitam propter vim centralem aliquam percurrit, id corpus in singulo puncto duplici vi centrali urgebitur, propriâ nempe quâ urgetur in centrum virium, & eâ quæ ex revolutione Plani orbitæ pendet, Hæc ubique erit inversè in triplicatâ ratione distantiæ à Centro.

Demonstrationem vide Propositione suprà indicatâ.

LEMMA II.

Si vis Solis in Lunam agens, sit quantitas quæ in mediocri distantiâ sit constans, dicaturque Y, crescat vero ut distantia à Terrâ, vis Terræ in distantiâ mediocri sit V, Dico quod (ponendo orbitam Lunarem circulo satis finitimam esse) motus Lunæ concipi potest quasi fieret in Ellipsi simili illi quam reverâ describit, sed cujus Planum foret mobile, ita ut integrâ revolutione Apsis ejus orbitæ promoveretur quantitate $360^{r}. \times \sqrt{\frac{r^3V - T^3Y}{r^3V - 4T^3Y}}$;

LIBER TERTIUS.
PROP. XXXV.
PROB. XVI.

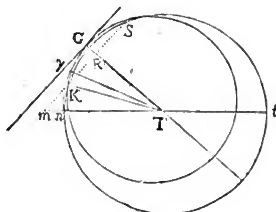
Demonstratio est in exemplis tertiis ad 121.
Propositionem XLV, sed eam demonstrationem hic breviter trademus.

Sit G Lunæ Apogæum, GK arcus quam minimus quem Luna in propriâ orbitâ dato exiguo tempore describeret, transferatur vero Luna cum suo Plano ita ut ejus Apsis transferatur in γ dum Luna ex G in K moveri debuisset; motus Lunæ in G ex duobus compositus censeatur, nempe ex motu secundum Tangentem per velocitatem acquisitam, & ex motu per vim centralem genito quævis simul ac semel in puncto G agere censeatur, hic motus per GR repræsentetur, motus secundum Tangentem per RK, fiat vero RK ad Rm, ut angulus GTK ad GTK + GTγ, & si nulla vis centralis ex revolutione plani oriretur, Luna foret in m cum debuisset esse in K, sed quia Tm est longior quam TK sumatur Tn = TK & reverâ Luna erit in n, & erit mn effectus vis centralis ex revolutione plani genitæ dum Luna descripsisset arcum GK.

Ra-

DE MUNDI SYSTEMATE.

122.



Radio TK centro T describatur circulus quem mT producta secet in t & mK producta secet in S, erit $mn \times mt = mK \times mS$ per Cor. Prop. XXXV. III. Elem. Eucl. ideoque erit $mn = \frac{mK \times mS}{mt}$ & si fingatur hunc circulum quam proxime coincidere cum Arcu orbitæ Lunaris GK, eodemque tempore describi quo arcus describeretur, erit GR effectus vis centralis Terræ dum Luna descripsisset arcum GK, & per notam proprietatem circuli hic arcus foret $\frac{RK^2}{2GT}$.

Ergo cum effectus vis centralis ex revolutione plani genitæ, & effectus vis centralis terræ eodem tempore producti sint mn & GR, vires illæ erunt uti mn & GR, sive ut quantitates ipsis æquales $\frac{mK \times mS}{mt}$ & $\frac{RK^2}{2GT}$ sed cum mt sit quamproxime 2GT, sitque $mS = mR + RK$, & $mK = mR - RK$, istæ vires sunt ut $mR^2 - RK^2$ ad RK^2, si itaque dicatur T distantia maxima Lunæ, T−X alia distantia quævis, r mediocris distantia, V vis terræ in eâ mediocri distantiâ, erit $\frac{r^2}{T^2}V$ vis centralis terræ in distantia T, ideoque, cum sit RK^2 ad $mR^2 - RK^2$ ut vis gravitatis ad vim ex revolutione plani genitam hæc erit, $\frac{r^2V \times mR^2 - r^2V \times RK^2}{T^2 \times RK^2}$.

In puncto K aut alio quocumque ubi TK est T−X, vis gravitatis est $\frac{r^2}{\overline{T-X}^2}V$, & quoniam vires ex revolutione Plani genitæ sunt inverse in triplicatâ ratione distantiarum, vis plani est $\frac{Tr^2V \times mR^2 - Tr^2V \times RK^2}{\overline{T-X}^3 \times RK^2}$ quæ si addatur vi gravitatis fit $\frac{Tr^2VRK^2 - Xr^2VRK^2 + Tr^2VmR^2 - Tr^2VRK^2}{\overline{T-X}^3 \times RK^2}$

Sed cum in eo puncto vis gravitatis sit $\frac{r^2}{\overline{T-X}^2}V$, & vis substractitia Solis sit ut distantiæ, ideoque sit $\frac{T-X}{r}Y$, si reducantur ad communem denominatorem $\overline{T-X}^3$ fient $\frac{Tr^2V - Xr^2V - \frac{T^4Y}{r} + \frac{4T^3XY}{r}}{\overline{T-X}^3}$. Ut autem æquipolleat Plani revolutio cum substractione vis Solis, ita determinandæ sunt quantitates RK^2 & mR^2, ut expressiones harum virium sint ubique æquales, & 1°. quidem cum X sit zero, vis gravitatis cum vi Plani est $\frac{Tr^2V \times mR^2}{\overline{T-X}^3 \times RK^2}$ & vis gravitatis substractâ vi Solis remanet $\frac{Tr^2V - \frac{T^4Y}{r}}{\overline{T-X}^3}$. Oportet ergo ut sit

$mR^2 =$

$mR^2 = \frac{\overline{RK}^2}{r^2 V} \times r^2V - \frac{T^3 Y}{r}$. Termini vero reliqui in quibus est X sunt $- \frac{X r^2 V RK^2}{T. X^3 \times RK^2}$ & $- \frac{X r^2 V + 4 T^3 X \frac{Y}{r}}{T - Y^3}$. Oportet ergo ut sit $RK^2 = \frac{\overline{RK}^2}{r^2 V} \times r^2 V - 4 T^3 \frac{Y}{r}$.

Itaque ut vis revolutionis plani vi gravitatis permixta, idem efficiet ac vis substractitia Solis, oportet ut sit mR^2 ad RK^2 ut $r^2V - \frac{T^3 Y}{r}$ ad $r^2 V - \frac{4 T^3 Y}{r}$, sive ut sit mR ad RK ut $\sqrt{r^2V - \frac{T^3 Y}{r}}$ ad $\sqrt{r^2V - \frac{4T^3Y}{r}}$ unde cùm sit m R ut motus Lunæ & Apogæi conjunctim & R K ut motus Lunæ, si Luna descripserit 360gr. fiet ut $\sqrt{r^2V - \frac{4T^3Y}{r}}$ ad $\sqrt{r^2 V - \frac{T^3 Y}{r}}$ ita 360gr. ad Lunæ & Apogæi motum conjunctim, qui erit ergo

$$360 \times \sqrt{\frac{r^2 V - \frac{T^3 Y}{r}}{r^2 V - \frac{4T^3Y}{r}}} = 360 \sqrt{\frac{r^3V - T^3Y}{r^3 V - 4T^3Y}},$$

itaque si ex hoc valore tollantur 360gr. Residuum erit motus Apogæi integrâ revolutione Lunæ. Q. E. O.

THEOR. I.

Invenire motum Apogæi Lunaris, supponendo orbitam Lunarem esse circulo finitimam.

Describat Luna arcum du, & eo durante vis Y constans maneat, & spectatur du quasi portio Ellipseos descriptæ, si vis Y durante totâ revolutione crevisset sicut distantiæ; Motus Apsidis durante totâ revolutione C, foret (per Lemma 2.) $c \sqrt{\frac{r^3 V - T^3 Y}{r^3 V - 4 T^3 r}} - c$, ideoque durante tempore quo arcus du percurritur foret $du \sqrt{\frac{r^3 V - T^3 Y}{r^3 V - 4 T^3 Y}} - du$, sit $r = T$, & sumatur valor quantitatis $\sqrt{\frac{V - Y}{V - 4Y}}$ is erit $1 + \frac{3Y}{2Y}$, hinc itaque elementum motus Apsidum est $\frac{3r}{2V} du$, loco Y ponatur $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$. fit $\frac{3F}{2Va} \times \frac{3yydu}{r} - r du$, cujus Integralis pro quadrante est $\frac{3F}{2Va} \times \frac{3r^2c}{8r} - \frac{rc}{4}$ & pro circulo $\frac{3F}{2Va} \times \frac{rc}{2}$ & cum $\frac{F}{V}$ sit $\frac{MM}{rAA}$ evadit, $\frac{3MM}{4AA} c$ sive cum $\frac{MM}{AA}$ sit fere .0055 est motus Apsidum $.0041c = 1^d.476$ sive $1^d 28'.33''$, & quia is absolvitur mense Synodico, ut habeatur motus Apogæi annuus, fiat ut .0808 ad 1, ita $1^d.476$ ad $18^{gr}.267$ sive $18^{gr}.16'$. quod est circiter dimidium veri motus Apsidis ut observat Newtonus. 121.

THEOR. II.

Invenire Leges motus Apogæi Lunæ supponendo Orbitam Lunarem esse Ellipticam.

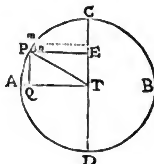
Distantia Lunæ Apogæa dicatur A, Perigæa dicatur P, sinus anguli Apogæi & lineæ quadraturarum sit y, vis Solis in Apogæo agens erit per demonstrata $A \times \frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$, & vis Solis agens in Perigæo, erit $P \times \frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$, & y in utroque casu est eadem quantitas, dicatur itaque C hæc quantitas $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$; siquidem est constans; Vis Solis substractitia aut additiția in Apogæo ac Perigæo erit A C vel P C; hoc est, erit ut quantitas constans C, ducta in distantiam A vel P; si itaque fingatur in punctis intermediis, eam vim esse etiam eandem constantem C, per distantiam ductam, aut saltem variationem quantitatis C compensari tunc per Cor 2. Prop XLV., & Exempla tertia ejusdem, erit motus Lunæ ab Apside ad Apsidem $360 \times \sqrt{\frac{V - C}{V - 4C}}$, si V sit

DE MUNDI SYSTEMATE. sit ut vis gravitatis terræ in data distantia, est vero $360\sqrt{\frac{V-C}{V-4C}} = 360 \times 1 + \frac{3C}{2V}$,

121. Ideoque motus Apsidis erit $360 \times \frac{3C}{2V}$ tota revolutione Synodico-Anomalisticâ quam pro synodicâ sumimus.

Loco C litteram Y quæ in toto calculo designabat quantitatem $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$ resumamus, & fingatur talem esse Apogæi motum ut ubique sit proportionalis motui $360 \times \frac{3Y}{2V}$ durante mense Synodico quod quidem ex prædictis consequitur, fingaturque Solem immotum stare & Apogæum ejus respectu in Antecedentia regredi, totamque revolutionem respectu Solis tempore α absolvere, sit ergo c tota peripheria, Apsis percurret respectu Solis arcum du tempore $\frac{\alpha du}{c}$; Ideo tempore synodico S percurret $360^{gr.} \times \frac{3Y}{2V}$ motuo suo, tempore $\frac{\alpha du}{c}$ percurret $\frac{\alpha}{S} \times \frac{3Y du}{2V}$, sed quia est $\frac{Y}{V} = \frac{F}{Va} \times \frac{3yy}{r} - r$ & $\frac{F}{V} = \frac{MMa}{AAr}$, elementum motus Apogæi est $\frac{\alpha}{S} \times \frac{3MM}{2AAr^2} \times 3yydu - r^2du$, cujus integralis est (si fingatur Apogæum à quadraturâ ad syzygiam in antecedentia retrocedere) $\frac{\alpha}{S} \times \frac{3MM}{2AAr^2} \times 3.rf.ydz - r^2u$ est autem autem $f.ydz = CPE$, hinc sumendo $\frac{\alpha M}{SA}$ pro unitate, est $\frac{3M}{2Ar} \times 3CPE - ru$ & pro quadrante $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{rc}{8}$ & pro circulo $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{rc}{2}$ prope ut in præcedenti Theoremate.

Hinc si sumatur motus Apogæi proportionalis tempori, dum Apogæum discedet à Sole arcu u, ejus motus esse debuisset $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{ru}{2}$ cum revera inventus sit $\frac{3M}{2Ar} \times 3CPE - ru$, hinc æquatio est $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{3ru}{2} - 3CPE$, sed $3CPE = \frac{3ru}{2} \mp \frac{3yz}{2}$ per



constr. hinc Æquatio fit $\frac{3M}{2Ar} \times \pm \frac{3yz}{2}$, sed $\frac{2yz}{r}$ est sinus arcus dupli distantiæ à Sole, hinc itaque hæc æquatio est ut sinus arcus dupli distantiæ Apogæi à Sole, unde Lex æquationis habetur, quod sit maxima in Octantibus, nulla in Syzygiis & quadraturis, positiva à quadraturis ad Syzygias negativa inde, sed ejus quantitas, non per hunc calculum, sed per observationes est determinanda; Siquidem, ut observatum est, Hypotheses adhibitæ ut ut à motu Apsidum non dissimiles, attamen ipsius quantitatem dimidio fere minorem exhibent. De his in Notis subsequentibus plura.

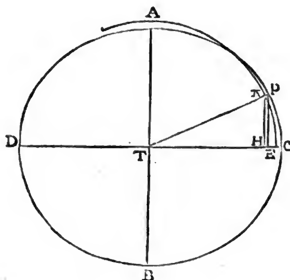
DE EXCENTRICITATE ORBITÆ LUNARIS.

Ipsa Curva quam Luna describit posset determinari per calculum adhibita ejus curvæ fluxione secunda, quæ obtinetur subtrahendo vim Solarem à vi terræ; Audivimus autem Viros in Mathesi Primarios hoc Problema, quod certe non est exiguæ difficultatis, suum fecisse; Cum autem nobis videatur Newtonum non aliter hanc curvam investigasse quam per approximationes quasdam, eadem Methodo, tenui nostro modulo magis accommodata, idem persequi conabimur.

I. Propositione XXVIII, hujus Libri quæ-

quæsivit Newtonus qualis foret orbita Lunaris ex suppositione illam citra actionem Solis circularem esse, & invenit quod si assumatur eam orbitam fieri Ellipsim per Solis actionem ea Ellipsis terram in centro haberet & ejus axis minor foret ad majorem qui secundùm lineam quadraturarum jaceret, ut 69 ad 70.

Hinc deducitur quod si semi-axis major 70 dicatur $r+p$, semi-axis minor 69 sit $r-p$, distantia Lunæ à terra in loco quovis dicatur $r+x$, sit y sinus distantiæ Lunæ à quadratura proxima, z ejus distantiæ Cosinus erit ubivis $x = p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$. 121.



Nam sit $T\Pi = r$, $TP = r+x$, $\Pi H = y$, $TH = z$; propter Triangula similia TPE, $T\Pi H$ est $PE = \frac{r+x}{r} \times y$ & $TE = \frac{r+x}{r} \times z$, unde per naturam Ellipseos est $\frac{\overline{r-p}^2}{\overline{r+p}^2} \times \overline{r+p}^2 - \frac{\overline{r-p}^2}{\overline{r+p}^2} \times \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times z^2 = \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times y^2$; Unde est $\overline{r-p}^2 = \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times y^2 + \frac{\overline{r-p}^2}{\overline{r+p}^2} \times \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times z^2$, sed divisione factâ, omissisque terminis superfluis, est $\frac{\overline{r-p}^2}{\overline{r+p}^2} = 1 - \frac{4p}{r}$, hinc fit $\overline{r-p}^2 = \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times y^2 + \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times z^2 - \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times \frac{4pz^2}{r}$ & quia $y^2 + z^2 = r^2$, & formatis dignitatibus omissisque terminis in quibus p, vel x, ad secundam dimensionem assurgunt habetur $r^2 - 2rp = r^2 + 2rx - \frac{4pz^2}{r}$ = sive loco z^2 scripto $r^2 - y^2$; deletis terminis æqualibus & transpositione factâ & divisione per 2, habetur $rx = \frac{2pr^3}{r} - \frac{2py^2}{r} - rp$ ideoque $x = p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$.

Ex quo sequitur quod in Octantibus x evanescit, illic enim $\frac{2y^2}{r^2} = 1$.

II. Ponatur vero Orbitam Lunarem

De Mundi Systemate. Ellip[illegible]am citra Solis actionem ejusque semi[illegible] majorem esse Y, excentricitatem [illegible] accedere autem vim Solis, sed ea[illegible]ntùm partem ejus actionis considerari quæ secundum orbitæ radium agit,

121. omissâ illâ parte ejus actionis Solaris quæ radio est perpendicularis, in hâc Hypothesi deprehendetur hujus orbitæ figuram variari, & magis oblongam evadere dum Apsides sunt in Syzygiis quam dum sunt in quadraturis, Excentricitatem pariter variabilem esse maximam dum Apsides sunt in Syzygiis, mediocrem cum Apsides sunt in Octantibus, cum sunt in Quadraturis minimam, & ex hâc hypothesi cum priori conjunctâ ejus excentricitatis variabilis Leges & quantitas rudi Minervâ determinari potest.

THEOR. I.

Positis Sole & lineâ Apsidum immotis, item omissâ eâ actionis Solaris parte quæ perpendiculariter in radium orbitæ Lunaris agit; Dico quod si describatur Ellipsis, cujus Terra sit focus & cujus axis major sit linea inter Lunæ Apogæum & Perigæum interjacens, Orbita Lunaris erit contenta intra eam Ellipsin cum Apsides erunt in Syzygiis, erit vero extra eam Ellipsim cum Apsides erunt in Quadraturis, cum vero Apsides erunt in Octantibus orbita Lunaris cum eâ Ellipsi coincidet.

Resumptis iis quæ in Theor. VII. calculi secundi dicta fuerunt, inventum est quod si distantia Lunæ citra Solis actionem fuisset x, evadit per Solis actionem secundum radium exercitam $x + \frac{x^4}{r^3} \times \frac{Y}{V}$ sive quia est $\frac{Y}{V} = \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{3yy}{r} - r$, hæc distantia fit $x + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3x^4y^2}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{r^4}{r^3}$. Hinc cum distantia Apogæa sit $r+f$, distantia Perigæa sit $r-f$, & eâ distantia quæ est perpendicularis in axem, & quæ est semi-lateri recto Ellipseos æqualis $r - \frac{f^2}{r}$; Distantia Apogæa evadit $r + f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4y^2 + 12r^3y^2f}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{r^4 + 4r^3f}{r^3}$. Distantia Perigæa fit $r - f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4y^2 - 12r^3y^2f}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{r^4 - 4r^3f}{r^3}$ & Distantia perpendicularis est $r - \frac{H}{r} + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4z^2 - 12r^2z^2f^2}{r^5}$; Ponendo z loco y, ut fieri debere ex ipsâ constructione patet, Ergo totus axis major invenitur $2r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{6r^4y^2}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{2r^4}{r^3}$, sive semi-axis est $r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3y^2}{r} - \frac{M^2}{A^2} \times r$; Excentricitas vero est $f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{12y^2f}{r^2} - \frac{M^2}{A^2} \times 4f$; Ex Ellipseωn autem naturâ, semi-latus Rectum Ellipseos cujus hic foret axis major & hæc foret excentricitas evaderet $r + \frac{M^2}{A^2} \times \overline{\frac{3y^2}{r} - r} - \frac{\overline{1 + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{12y^2}{r^2} - 4}^2}{r + \frac{M^2}{A^2} \times \overline{\frac{3y^2}{r} - r}} f^2 = r + \frac{M^2}{A^2} \times \overline{\frac{3y^2}{r} - r} - f^2 \times \frac{1}{r} + \frac{7M^2}{A^2r^2} \times \frac{3y^2}{r} - r$, sed ea distantia perpendicularis est in curva Lunari $r - \frac{f^2}{r} + \frac{M^2}{A^2} + \overline{\frac{3z^2}{r} - r} - \frac{4M^2f^2}{A^2r^2} \times \frac{3z^2}{r} - r$ unde differentia inter distantiam perpendicularem in Ellipsi & eam distantiam in Orbita Lunari est $\frac{3M^2}{A^2r} \times y^2 - z^2 - \frac{M^2f^2}{A^2r^3} \times 21y^2 - 12z^2 - 3r^2$, sive omisso hoc ultimo termino propter f^2, ea differentia est $\frac{3M^2}{A^2r} \times y^2 - z^2$. Si Apsides sunt in Syzygiis est $y=r$, & $z=o$, unde hæc quantitas est maxima quæ esse possit, unde distantia perpendicularis in Ellipsi excedit distantiam in orbita Lunari quantitate $\frac{3M^2r}{A^2}$; Si Apsides sunt in quadraturis fit $y=o$, & $z=r$, un-

unde hæc quantitas $\frac{3M^2}{A^2 r} \times y^2 - z^2$ evadit $-\frac{3M^2 r}{A^2}$, ideoque distantia perpendicularis in Ellipsi minor est distantia in Orbita Lunari, unde fit ut Orbita Lunaris contineat intra se Ellipsim; Si vero Apsides sint in Octantibus evanescit $y^2 - z^2$, hinc ipsa Orbita Lunaris cum Ellipsi coincidit.

Cor. Ex hoc Theoremate liquet quod omissio vis quæ agit perpendiculariter in radium orbitæ Lunaris, exhibet orbitæ Lunaris mutationem plane oppositam illi quæ ex ejus consideratione deduceretur omissâ excentricitate orbitæ, nam sive Apsides sint in Syzygiis sive in quadraturis liquet ex Theoremate præcedenti orbitam Lunæ prolongari secundum lineam Syzygiarum, contrahi vero secundum lineam quadraturarum, cujus oppositum statuebatur Prop. XXVIII. hujusce, ex consideratione vis Solaris totius, sed semotâ Excentricitatis orbitæ Lunaris ratione; hinc ergo ut mediocrem quodammodo teneamus viam; jungemus incremento distantiæ Lunaris secundum Hypothesim Theor. VII. calculi 2^{di}. invento, partem aliquam $\frac{m}{n}$ decrementi secundum methodum Newtonianam inventi; Unde sic medium quoddam inter ambas Hypotheses obtinebimus. Itaque quævis distantia x evadet $x + \frac{x^4}{r^3} \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m} px \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}} = x + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3x^4y^2}{r^5} - \frac{M^2 \times x^4}{A^2 \times r^3} + \frac{n}{m} p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$.

PROBL. I.

Positis iis quæ in Corollario præcedentis Theorematis statuuntur, & supposito Orbitam Lunarem, quomodocumque mutatam per Solis actionem, Ellipsi proximam esse, Invenire Leges excentricitatis Orbitæ Lunaris.

Primò cum distantia Apogea [illegible] $+ f$, hæc distantia loco x substitut[illegible] valore per Coroll. Theor. præcede[illegible] reperio evadit $r + f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4y^2 \ldots r^3fy^2}{r^5} - \frac{M^2 \times r^4 + 4r^3}{A^2 r^3} + \frac{n}{m} p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$; ut habeatur distantia mediocris loco x scribatur r, sinus autem ejus distantiæ à quadratura proxima est quam proxime Cosinus distantiæ Apogæi à quadratura proxima, ideoque loco y scribatur z, fit $r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3z^2}{r} - \frac{M^2 r}{A^2} + \frac{n}{m} p \times \overline{1 - \frac{2z^2}{r^2}}$ quæ substracta ex distantiâ Apogæâ relinquit excentricitatem $f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4 \times \overline{y^2 - z^2} + 12rfy^2}{r^5} + \frac{M^2}{A^2} \times 4f - \frac{2np}{m} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}$, quæ omissis terminis omittendis fit $f + \frac{3M^2 r^2 - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}$; Hinc illius excentricitatis hæ sunt leges, 1°. Excentricitas est maxima cum Apsides sunt in Syzygiis, nam illic y fit r, & $z = 0$, hinc excentricitas evadit $f + \frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2}$.

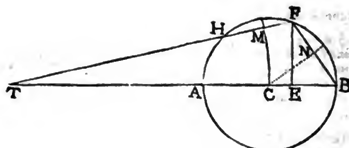
2°. Excentricitas est minima cum Apsides sunt in Quadraturis, illic enim est $y = 0$ & $z = r$, unde Excentricitas evadit $f - \frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2}$.

3°. Excentricitas est mediocris cum Apsides versantur in Octantibus, estque $= f$, quia $y^2 = z^2$ sicque evanescit $\frac{3M^2 r^2 - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}$.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROB. XVI.

121.

121.



4°. In aliis quibuscunque locis hâc constructione obtinetur fere excentricitas, sumatur TC $=f$. CB $= \frac{3M^2r - \frac{2n}{m}A^2p}{A^2}$, hoc radio CB describatur circulus in quo sumatur BF æqualis duplæ distantiæ Apsidum à Syzygiâ, erit satis proximè CF excentricitas, nam centro T radio TC describatur arcus CM, cum sit perpendicularis in lineam THMF, & is arcus parum discedat à linea recta, punctum M erit medium lineæ HF per 3. 3 Elem. & MF erit æqualis Cosinui CE arcûs BF.

Radius CB ad compendium dicatur g, & quia sinus dimidii arcus BF in circulo cujus radius erat r dicebatur z in hoc calculo, hinc in hoc circulo erit BN $= \frac{g}{r}z$, & juxta nota Trig. Theoremata, ut CB (g) ad BN ($\frac{g}{r}z$) sic FB ($\frac{2gz}{r}$) ad EB $= \frac{2zz}{rr}g$, & CE $= g - \frac{2zz}{rr}g = g \times \frac{rr - 2zz}{rr}$, sed $rr - zz = yy$, hinc CE $= g \times \frac{yy - zz}{rr}$, ideoque TF sive TE $= f + \frac{3M^2r - \frac{2n}{m}A^2p}{A^2} \times \frac{yy - zz}{r^2}$ ut prius inventum fuerat.

Schol. Hæc Ellipsis nonnihil discederet à loco Perigæi Lunæ per easdem hypotheses determinato, si verò ex distantia Perigæa cum distantia Apogæa collatis excentricitas quæreretur, diversa quidem ejus quantitas obtineretur, sed eædem forent Leges, nam distantia Apogæa foret $r + f + \overline{r + 4f} \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m}p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$ & Perigæa $r - f + \overline{r - 4f} \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m}p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$ hinc axis major esset $2r + 2r \times \frac{Y}{V} + \frac{2n}{m} \times p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$ & semi-axis $r + r \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m}p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$; Excentricitas vero $f + 4f \times \frac{Y}{V}$ sive $f \times \overline{1 + \frac{4M^2}{A^2r} \times \frac{3yy}{r} - r}$. Quæ quidem est maxima cum Apsides sunt in Syzygiis quia illic $y^2 = r^2$ ergo $f \times \overline{1 + \frac{8M^2}{A^2}}$. In quadraturis fit minima quia evanescit y, ideoque fit $f \times \overline{1 - \frac{4M^2}{A^2}}$, hinc mediocris excentricitas est $f \times \overline{1 + \frac{2M^2}{A^2}}$, quod evenit in Octantibus tunc enim $y^2 = \frac{1}{2}r^2$, ideoque $\frac{3y^2}{r} - r = \frac{1}{2}r$, fit ergo $f \times \overline{1 + \frac{4M^2}{A^2r} \times \frac{1}{2}r} = f \times \overline{1 + \frac{2M^2}{A^2}}$. In cæteris locis sumatur TC $= f \times \overline{1 + \frac{2M^2}{2A^2}}$ & CB $= \frac{6M^2}{A^2}f$, & si CB dicatur

g ut in Probl. præcedente erit $CE = g \times \frac{rr - 2zz}{rr} = g \times \frac{rr - 2rr + 2yy}{rr} = g \times \frac{2yy - rr}{rr}$ ideoque $TE = f \times \overline{1 + \frac{2M^2}{A^2} + \frac{6M^2}{A^2}} \times \frac{2yy - rr}{rr} = f \times 1 + \frac{2M^2}{A^2 r} \times r + \frac{4M^2}{A^2 r} \times \frac{3yy}{r} - \frac{6M^2}{A^2 r} \times r = f \times 1 + \frac{4M^2}{A^2 r} \times \frac{3y^2}{r} - r$ quæ est Excentricitas reperta, & eadem constructione obtinetur ac in hypothesi Problematis.

Si denique sicut Astronomis solemne est axim majorem constantem assumamus, & semi-axis major dicatur r, qui ex distantiâ Apogæa subducatur ut habeatur Excentricitas, eædem ejus excentricitatis Leges iterum obtinebuntur; erit quippe Excentricitas $f + r + 4f \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m} p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$ sive $f + \frac{M^2}{A^2} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r} + \frac{4M^2 f}{A^2 r} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r} + \frac{n}{m} p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$; Quæ fit in Syzygiis ubi $y^2 = r^2$, $f + \frac{2M^2 r}{A^2} + \frac{8M^2 f}{A^2} - \frac{2np}{m}$, in Quadraturis ubi y evanescit $f - \frac{M^2 r}{A^2} - \frac{4M^2 f}{A^2 f} + \frac{n}{mp}$. Unde mediocris Excentricitas est $f + \frac{M^2 r}{2A^2} + \frac{2M^2 f}{A^2} - \frac{np}{2m}$, quæ quidem etiam in Octantibus circiter occurrit quia majores termini $\frac{M^2}{A^2} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r} + \frac{4M^2 f}{A^2 r} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}$ evadunt $\frac{M^2 r}{2A^2} + \frac{M^2 f}{A^2}$ in Octantibus, nam cum y^2 illic sit $\frac{1}{2} r^2$ fiunt ii termini $\frac{M^2}{A^2} \times \frac{3rr}{2r} - r$, $+ \frac{4M^2 f}{A^2 r} \times \frac{3rr}{2r} - r = \frac{M^2 r}{2A^2} + \frac{2M^2 f}{A^2}$.

PROBL. II.

Variationis Excentricitatis quantitatem maximam determinare.

Hoc Problema nonnisi per determinationem veræ curvæ quam sequitur Luna potest determinari, quâ non inventâ ad 121.
Observationes recurrendum, ut fecisse videtur Newtonus, mediocrem Excentricitatem esse partium 5505 quarum radius sit 100000 assumit, & maximum incrementum vel decrementum assumit $1172\frac{1}{4}$, tam ex Observationibus quàm quod ille numerus ad concinnandam constructionem pro Æquatione Apogæi commodus esset ut suo loco dicemus.

Illust. Cassinus mediocrem illam Excentricitatem facit 5430 Incrementum vero & Decrementum 1086, neq; malè hæc consentiunt cum quantitatibus Prob. 1°. inventis, si loco quantitatis indeterminatæ $\frac{n}{m}$ scribatur $\frac{1}{2}$; Nam, id Incrementum aut Decrementum inventum fuerat $\frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2}$, sive accuratiùs sumptis quantitatibus quæ ad simplicitatem calculi omissæ fuerant cum Excentricitas inventa fuisset $f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4 \times \overline{y^2 - z^2} + 12r^3 f y^2}{r^5} + \frac{M^2}{A^2} \times 4f - \frac{2np}{m} \times \frac{y^2 z^2}{r^2}$, hæc evadit (cum Apsides sunt in Syzygiis & $z = o$, $y = r$) $f + \frac{M^2}{A^2} \times 3r + 12f + \frac{M^2}{A^2} \times 4f - p$. & cum sunt in Quadraturis ubi $z = r$ & $y = o$, $f - \frac{M^2}{A^2} \times 3r + \frac{M^2}{A^2} \times 4f + p$, unde mediocris Excentricitas est $f + \frac{M^2}{A^2} \times 10f$, & Incrementum vel Decrementum, $\frac{M^2}{A^2} \times \overline{3r + 6f} - p$.

Cum itaque sit $\frac{M^2}{A^2} = .0055$ ex priùs inventis, mediocris Excentricitas $\overline{1 + \frac{10M^2}{A^2}} \times f$ quam

De Mundi Systemate.

121\. (†) Hisce motuum lunarium computationibus ostendere volui, quod motus lunares per theoriam gravitatis à causis suis computari possint. Per eandem theoriam inveni præterea quod æquatio annua medii motus lunæ oriatur à variâ dilatatione orbis lunæ per vim solis, juxta Corol 6. Prop. LXVI. Lib. I. (h) Hæc vis in perigæo solis major est, & orbem lunæ dilatat; in apogæo ejus minor est, & orbem illum contrahi permittit. In orbe dilatato luna tardiùs revolvitur, in contracto citiùs; & æquatio annua, per quam hæc inæqualitas compensatur, in (i) apogæo & perigæo solis nulla est, in (k) mediocris solis à terrâ distantia ad 11′. 50″ circiter ascendit, in aliis locis æquationi centri solis proportionalis est; & additur medio motui lunæ ubi terra pergit ab aphelio suo ad perihelium, & in oppositâ orbis parte subducitur. Assumendo radium orbis magni 1000

(quam Cassinus invenit 5430 & Newtonus 5505) est 1.055 f, hinc est f=5147 secundùm Cassinum & 5218 secundùm Newtonum quod utrumque ductum in .0055, prius efficit 1819.85 alterum 1822.2 cumque p sit 719, id ex priore detractum relinquit 1100.85, ex posteriore 1103.2; qui numeri incidunt inter 1172 & 1086 quos pro Excentricitatis variatione assignant Newtonus aut Hallejus & Cassinus.

(†) * *Hisce motuum* &c. Hæc est enim veritatis ejus Theoriæ fortissima probatio, si ea quæ Mathematice deducuntur ex eâ Theoriâ apprime consentiant cum Phænomenis in casu maxime composito.

(h) * *Hæc vis in Perigæo Solis major est. & orbem Lunæ dilatat*; Vis Solis aliquando adjungitur vi Terræ ut Lunam versus Terram attrahat, aliquando idque sæpiùs & ubi fortiùs agit vi Terræ est opposita, & Lunam à Terrâ distrahit, itaque toto effectu vis Solis simul considerato, Luna per eam vim à Terrâ distrahitur & eò magis quò ea vis Solis major est; ideoque Luna magis à Terrâ distrahitur dum Terra versatur in suo Perihelio quàm ubi versatur in Aphelio: hinc primo casu orbita Lunæ magis est dilatata quàm hoc altero.

(i) * *In Apogæo & Perigæo nulla est* id omninò liquet ex Coroll. 2. Probl. V. prioris calculi, nam ex iis quæ in eo Corollario statuuntur liquet quod ut habeatur Æquatio quovis in loco, hæc proportio est instituenda, ut areæ Ellipseos quam Terrâ describit dimidium ad aream descriptam à Terrâ ab Aphelio (vel Perihelio) usque ad eum locum propositum, ita semestris tardatio ad tardationem mediocri motui adscriptam, sed in hoc casu ea area à Terra descripta est ipsa semi-Ellipsis, ergo etiam tardatio medio motui adscripta est ipsa semestris tardatio; Tum verò sumitur ex Probl. IV. tardatio loco dato conveniens quæ ex tardatione mediocri tollitur, & differentia est æquatio quæsita; sed rursus ea tardatio Aphelio aut Perihelio conveniens est ipsa semestris tardatio, ergo, ex tardatione mediocri motui eo in loco adscripta, detracta nullum est residuum, cum plane sint æquales, ergo æquatio in Apogæo ac Perigæo nulla est.

(k) * *In mediocri Solis distantia &c.* Videntur hæc verba statuere quid constet ex Observationibus, nempe hanc æquationem esse 11′. 50″. ubi maxima est, & esse æquationi centri proportionalem; observa-

1000 & eccentricitatem terræ $16\frac{7}{8}$, hæc (l) æquatio, ubi maxima est, per theoriam gravitatis prodiit 11′. 49″. Sed eccentricitas terræ paulo major esse videtur, & auctâ eccentricitate hæc æquatio augeri debet in eâdem ratione. Sit eccentricitas, $16\frac{11}{12}$, & æquatio maxima erit 11′. 51″.

(m) Inveni etiam quod in perihelio terræ, propter majorem vim solis, apogæum & nodi lunæ velocius moventur quam in aphelio ejus, idque in triplicatâ ratione distantiæ terræ à sole inversè. (n) Et inde oriuntur æquationes annuæ horum motuum

servavimus autem Ill. Cassinum hanc æquationem ubi maxima est 9′. 44″. efficere.

(l) * *Hæc æquatio ubi maxima est prodiit 11′. 49″.* Sumptâ Orbitâ Lunari ut circulari, per Theoriam gravitatis prodiit 11′. 47″. imo minor, sive Newtonus aliâ viâ eum calculum instituerit quàm nos, sive alia Elementa assumpserit, sive ex excentricitate Orbitæ Lunaris consideratione hanc quantitatem auxerit, cætera verò ad amussim quadrant.

Eam Æquationem excentricitati Terræ esse proportionatam ex Cor. I. Prob. V. pag. 487., prodit enim ejus valor per quantitates fixas ductas in excentricitatem quæ in calculo dicebatur e; & quamvis quantitas b quæ est $\sqrt{a^2 - e^2}$ in eo valore occurrat, idcircò non est censendum æquationis valorem multùm pendere ex illa dignitate e^2 siquidem in illo termino ea dignitas fere evanescit respectu a^2.

Liquet etiam ex Cor. 2. ejusd. Probl. cæteras æquationes esse proportionatas æquationi centri Solis: addendas esse motui Lunæ dùm pergit ab Aphelio ad Perihelium, illic enim tardatio vera minor est quam tardatio mediocris, ergo provectior est Luna quam secundùm tardationem mediocrem, addi ergo debet ejus vix iste tardationis defectus; ex Perihelio pergendo res oppositâ ratione procedet.

(m) * *Inveni etiam &c.* Id utique statuit Cor. 14. Prop. LXVI. Lib. I., illic ostendit Vires Solis esse ut Cubos distantiarum reciprocè, unde cùm sint causæ errorum Apogæi & Nodorum, illi errores sive motus qui suis causis sunt proportionales, debent esse ut cubi distantiarum reciproce; Hinc dicatur a mediocris distantia Terræ à Sole, distantia quævis alia dicatur $a \pm x$, motus medius diurnus Apogæi in distantia a sit g. motus medius nodi in ea distantia a sit n. in distantia x, motus Apogæi erit $\frac{a^3}{\overline{a \pm x}^3} g$ & motus nodi erit $\frac{a^3}{\overline{a \pm x}^3} n$ aut formando seriem ex his quotientibus & omissis terminis in quibus altior dignitas quantitatis x occurrit, erit motus Apogæi in quavis distantia, $g \mp \frac{3x}{a} g$, & motus nodi $n \mp \frac{3x}{a} n$.

(n) * *Et inde oriuntur Æquationes annuæ, Æquationi centri Solis proportionales.* 121. Cùm motus Apogæi Lunæ & nodi uniformis non sit cùm Terra ad varias à Sole distantias transfertur, sed addatur aut detrahatur ex eorum motu medio quantitas variabilis $\frac{3x}{a} g$, & $\frac{3x}{a} n$, si quæratur progressus Apogæi Lunæ aut nodi cùm Terra ab Aphelio Solis certâ quantitate dierum discesserit, is progressus ex motu medio Apogæi Lunæ aut nodi rectè non computabitur, quippe singulis diebus præter motum medium quantitate $\frac{3x}{a} g$, $\frac{3x}{a} n$ processerunt aut recesserunt, summa ergo om-

DE MUNDI SYSTEMATE.

tuum æquationi centri ſolis proportionales. Motus (o) autem ſolis eſt in duplicatâ ratione diſtantiæ terræ à ſole inversè & (p) maxima centri æquatio, quam hæc inæqualitas generat, eſt $1^{gr}. 56^{l}. 20^{ll}$ prædictæ ſolis eccentricitati $16\frac{11}{12}$ congruens. (q) Quod ſi motus ſolis eſſet in triplicatâ ratione diſtantiæ inversè, hæc inæqualitas generaret æquationem maximam $2^{gr}. 54^{l}$

121. omnium harum quantitatum erit ſumenda, quæ erunt correctiones ſeu æquationes quibus ex loco medio Apogæi & Nodi ad verum ejus locum deveniemus, illæ verò æquationes æquationibus centri Solis erunt proportionales, nam cùm motus Solis ſit in duplicatâ ratione diſtantiæ inverse (ut exponetur in notâ o proximè ſequenti) ſit m motus medius diurnus Solis in mediocri diſtantia a, in diſtantiâ quavis $a \pm x$ is motus erit $\frac{a}{\overline{a \pm x}^2} m$, ſeu in ſeriem reſolvendo hanc Expreſſionem erit $m \mp \frac{2x}{a} m$, hinc differentia inter motum medium & verum erit $\pm \frac{2x}{a} m$, & ex ſummâ earum differentiarum conflabuntur æquationes centri Solis, cùm ergo æquationes Apogæi & Lunæ ex ſummâ quantitatum $\pm \frac{3x}{a} g$, $\frac{3x}{a} n$ conſtent, erunt iſtæ æquationes ubivis in punctis correſpondentibus ſeu in æqualibus ab Aphelio Terræ diſtantiis in ratione conſtanti $3g$. & $3n$ ad $2m$: Ideoque erunt ubique proportionales æquationibus centri Solis.

(o) * *Motus Solis eſt in duplicatâ ratione diſtantiæ inversè* ſcilicet motus Solis angularis è Terrâ ſpectatus; nam cùm Sol deſcribat ſemper areas tempori proportionales, arcus quos reverâ deſcribit ſunt ſemper inversè ut diſtantiæ, ſed præterea magnitudines apparentes eorum arcuum è Terrâ ſpectatorum ſunt etiam inverse ut eorum à Terrâ diſtantia, ergo arcus quos Sol ſingulis tempuſculis æqualibus deſcribere videtur e Terrâ, ſunt in duplicatâ ratione diſtantiarum inversè.

(p) *Et maxima Centri Æquatio eſt* $1^{o}. 56^{l}. 20^{ll}$. Illam $1^{o}. 55^{l}. 50^{ll}$. facit Ill. Caſſinus.

(q) * *Quod ſi motus Solis eſſet in triplicatâ ratione diſtantiæ inversè*; Dicatur M motus Solis in diſtantiâ mediocri, quæ dicatur a, & diſtantia quævis alia ſit $a \pm x$; ſi motus Solis eſſet in triplicatâ ratione diſtantiarum inverse, in diſtantiâ $a \pm x$ foret $\frac{a^3}{\overline{a \pm x}^3} M$ ſive $\frac{a^3 M}{a^3 \pm 3a^2x + 3ax^2 \pm x^3}$ aut formando ſeriem, is motus in diſtantia $a \pm x$ erit $M \pm \frac{3x}{a} M$ omiſſis reliquis terminis ob exiguitatem fractionis $\frac{x}{a}$; ideoque differentia motus in diſtantiâ verâ & motus in diſtantiâ mediocri foret $\mp \frac{3x}{a} m$: In verâ autem hypotheſi quòd Solis motus creſcat in ratione ſubduplicatâ inversâ diſtantiarum, eodem ratiocinio invenitur quod in quovis loco motus Solis erit $\frac{a^2 M}{a^2 \mp 2ax + x^2}$ & diviſione facta erit is motus $M \mp \frac{2x}{a} M$, & differentia motus veri & motus medii erit $\mp \frac{2x}{a} M$, eritque ergo hæc differentia ad differentiam in priore Hypotheſi inventam ut 2 ad 3 in omnibus locis correſpondentibus; ſed æquationes conflantur ex ſummâ differentiarum motus veri & medii ſumptarum in omnibus locis ab Aphelio uſque ad locum eum ubi æquatio applicatur; cùm ergo in utrâque hypotheſi ſingulæ differentiæ motus veri & medii ſint in omnibus punctis correſpondentibus in

54′ 30″. (r) Et propterea æquationes maximæ, quas inæqualitates motuum apogæi & nodorum lunæ generant, sunt ad 28″, 54′. 30″. ut motus medius diurnus apogæi, & motus medius diurnus nodorum lunæ sunt ad motum medium diurnum solis. Unde prodit æquatio maxima medii motus apogæi 19′. 43″, & æquatio maxima medii motus nodorum 9′. 24″. (ſ) Additur verò æquatio prior & subducitur posterior, ubi terra pergit à perihelio suo ad aphelium: & contrarium fit in oppositâ orbis parte.

Per theoriam gravitatis (t) constitit etiam quod actio solis in lunam

in ratione constanti 2 ad 3 erunt etiam summæ earum differentiarum in locis correspondentibus, ipsæ nempe æquationes in eâdem ratione, ergo maxima centri æquatio in hypothesi verâ motum Solis decrescere in duplicatâ ratione distantiarum est ad æquationem maximam in hypothesi fictitiâ motum Solis decrescere in triplicatâ ratione distantiarum ut 2 ad 3 cum ergo æquatio maxima sit per Observationes 1 gr. 56′. 20″. hæc altera erit $\frac{3}{2} \times 1$ gr. 56′. 20″. sive 2 gr. 54′. 30″. Q. E. D.

(r) * *Et propterea Æquationes maximæ quas inæqualitates motuum Apogæi & nodorum generant sunt ad 2 gr. 54′. 30″. ut modus medius Apogæi & Nodi ad motum medium Solis* Nam statutum est motus horum esse in triplicatâ ratione distantiarum inversè, sit g motus medius Apogæi in mediocri nempe distantiâ, n motus medius nodorum, & m motus medius Solis, decrescantque in triplicatâ ratione inversâ distantiarum, deprehenditur eodem modo ac in no à præcedente quod in quolibet loco differentiæ inter motum verum & motum mediocrem erunt $\mp \frac{3x}{a} g$, $\mp \frac{3x}{a} n$, $\mp \frac{3x}{a} m$, Æquationes maximæ sunt summa earum quantitatum sumptarum ab Apogæo Solis usque ad mediocrem ejus à Terrâ distantiam, itaque illæ Æquationes constituuntur per series, omnium $\frac{3x}{a} g$, omnium $\frac{3x}{a} n$, & omnium $\frac{3x}{a} m$, qualescumque ergo sint illæ quantitates variabiles x, cùm eædem sint in tribus hisce seriebus summæ earum seriesum sive Æquationes maximæ, erunt inter se ut illæ quantitates g, n & m, per quas omnes partes singularum illarum serierum ducuntur, illæ verò quantitates sunt motus medii Apogæi, nodi & Solis, ergo datâ unâ ex his Æquationibus, v. gr. datâ Æquatione maximâ Solis & motu medio Apogæi, nodi & Solis, habentur cæteræ Æquationes maximæ statuendo illas esse ad eam Æquationem datam, ut ii motus medii dati.

Liquet verò ex ipsâ hac Demonstratione, verùm quidem Solis motum medium assumi debere, non autem veram ipsius Æquationem sed eam quæ prodit fingendo Solis motum in triplicatâ ratione distantiarum decrescere.

(ſ) * *Additur verò Æquatio* Apogæi Lunæ *& subducitur Æquatio* nodi *ubi terra pergit a Perihelio suo ad Aphelium*; motûs Apogæi Lunæ est progressivus, motus verò nodi est retrogradus; Terrâ autem à Perihelio procedente uterque motus major fit motu medio, inde ergo plus procedit Apogæum Lunæ, quàm per motum medium, plus recedit nodus, prior ergo Æquatio addenda, posterior detrahenda.

(t) * *Per theoriam gravitatis constitit etiam quod actio Solis in Lunam paulo major*

DE MUNDI SYSTEMATE.

lunam paulo major ſit, ubi tranſverſa diameter orbis lunaris tranſit per ſolem, quam ubi eadem ad rectos eſt angulos cum linea terram & ſolem jungente: & propterea orbis lunaris paulo major eſt in priore caſu quam in poſteriore. Et (u) hinc oritur alia æquatio motus medii lunaris, pendens à ſitu apogæi lunæ ad ſolem, quæ quidem maxima eſt cum apogæum lunæ verſatur in octante cum ſole; & nulla cum illud ad quadraturas vel ſyzygias pervenit: & motui medio additur in tranſitu apogæi lunæ à ſolis quadraturâ ad ſyzygiam, & ſubducitur in tranſitu apogæi à ſyzygiâ ad quadraturam. Hæc æquatio, quam ſemeſtrem vocabo, in octantibus apogæi, quando maxima eſt, aſcendit ad 3′. 45″ circiter, (x) quantum ex phænomenis colligere

1221. *jor ſit ubi tranſverſa Diameter orbis Lunaris tranſit per Solem &c.*

Facile deducitur ex Cor. Theor. IV. calculi primi (pag 479) quod (exiſtente x diſtantiâ Lunæ à Terrâ, r ejus diſtantiâ mediocri, & y ſinu ejus diſtantiæ à quadraturâ, exiſtente etiam F vis Solis in terram in mediocri ejus diſtantiâ a) actio Solis Lunam trahentis ſecundum directionem radii orbitæ Lunaris eſt $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$.

Unde ea vis, Lunâ in quadraturis exiſtente, fit $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times -r$, eſt ergone negativa & Lunam ad Terram attrahit cum verò Luna eſt in ſyzygiis, ea actio Solis fit $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times 2r$, eſt itaque poſitiva & Lunam à Terra diſtrahit; In locis autem ſimilibus hæ Solis actiones ſunt ut diſtantiæ x Lunæ à Terrâ. Hinc ſi Apſides ſint in ſyzygiis ſit verò Luna in quadraturis, ubi per actionem Solis ad terram trahitur ambæ diſtantiæ x Lunæ in utrâque quadraturâ poſitæ ſunt ſimul æquales lateri recto orbitæ Lunaris; cum verò Luna eſt in ſyzygiis ubi per actionem Solis à Terra diſtrahitur, ambæ diſtantiæ x Lunæ in conjunctione & oppoſitione poſitæ ſunt ſimul æquales axi majori, qui ſemper ſuperat latus rectum.

Si verò Apſides ſunt in quadraturis, & Luna etiam in quadraturis ambæ diſtantiæ x Lunæ in utrâque quadraturâ poſitæ ſimul ſumptæ ſunt æquales axi majori, & cum Luna eſt in ſyzygiis, ambæ diſtantiæ x Lunæ in conjunctione & oppoſitione poſitæ ſunt ſimul æquales lateri recto orbitæ Lunaris.

Ergo cum Apſides ſunt in Syzygiis actio Solis quæ Lunam ad Terram attrahit eſt minor, & e contra actio quæ Lunam à Terra diſtrahit eſt major quam cum Apſides ſunt in quadraturis, ideoque orbis Lunaris paulo major fieri debet in priore caſu quam in poſteriore.

De punctis autem inter quadraturas & Syzygias intermediis ab eo quod in his punctis extremis evenit judicari poteſt, ſed potiſſimum ex calculo quo Æquatio ex hâc cauſâ nata determinatur.

(u) * *Et hinc oritur alia Æquatio motus medii Lunaris* &c. Hujus æquationis calculum ejuſque Leges explicatas habes Probl. VI. calculi ſecundi (pag. 500.) ejuſque Corollariis.

(x) * *Quantùm ex Phænomenis colligere potui* &c. Ex Coroll. 5°. Probl. VI. (pag. 501. in quo quædam menda irrepſerunt à B. L. prius corrigenda) Æquatio hæc 3′. 56″ eſt reperta, quædam autem cau-

ligere potui. Hæc eſt ejus quantitas in mediocri ſolis diſtantiâ à terrâ. (y) Augetur verò ac diminuitur in triplicatâ ratione diſtantiæ ſolis inversè; ideoque in maximâ ſolis diſtantiâ eſt 3′. 34″,

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

cauſæ ſunt cur hæc quantitas pro verâ quantitate adhiberi nequeat, ſed hæc æquatio ex phænomenis ſit colligenda; primò, quantitas f ſive excentricitas Orbitæ Lunaris ſatis certo non eſt cognita, ut conſtat ex iis quæ de excentricitate dicta ſunt, hic autem mediocrem excentricitatem aſſumpſimus 5505 partium quarum radius orbitæ ſit 100000 cum Newtono quam Caſſinus facit tantum 5430 partium, & forte minor aſſumi deberet ſi attendatur ad Excentricitatem Orbitæ Lunaris qualis ea foret citra Solis actionem ex quibus conſiderationibus, liquet æquationem inventam minorem factum iri quam 3′. 56″, ſicque magis acceſſuram ad æquationem 3′. 45″ quæ ex Phænomenis colligitur: ſecundò cum varias Hypotheſes aſſumpſerimus vero quidem proximas non tamen veras abſolutè ut liquet ex Cor. I. Probl. I. (pag. 496) ex iis erroribus ipſæ quantitates abſolutæ mutantur ſed manent earum proportiones ex quibus Leges æquationum pendent ita ut datâ aliquâ ex æquationibus per Phænomena, reliquæ ſatis tuto exinde deduci queant.

(y) * *Augetur verò ac diminuitur in triplicatâ ratione diſtantiæ inversè.* Probl. VI. (pag. 500. col. 2.) hæc æquatio inventa eſt $\frac{15\, A \times F q^9 f^2}{109.73 \times S.\, V.\, a r^8} \times -163.595$ PQT, in quâ expreſſione a repræſentat mediocrem Solis à Terra diſtantiam, in aliâ itaque à Sole diſtantiâ loco a ponatur X, & loco F ponatur $\frac{a^2 F}{X^2}$ quia vis Solis F eſt inversè ut quadrata diſtantiarum, hac ergo ſubſtitutione factâ æquatio fit $\frac{15\, A a^2 F q^9 f^2}{109.73.\, S.\, V X^2.\, X r^8} \times -163.595$ PQT tum loco $\frac{F}{V}$ ſubſtituatur $\frac{a M^2}{r A^2}$ (ut liquet ex Cor. Probl. I. calculi primi, pag. 484) æquatio evadit $\frac{15\, M^2 a^3 q^9 f^2}{109.73\, S.\, A.\, X^3\, r^9} \times -163.595$ PQT, & quia in octantibus eſt PQT $= \frac{1}{4} r^2$ æquatio eſt $-\frac{15 \times 163.595 \times M^2 a^3 q^9 f^2}{4 \times 109.73 \times S.\, A\, X^3 r^7}$, in quâ cum nulla ſit variabilis quantitas præter X^3 in denominatore occurrente, liquet Æquationem cum Apogæum eſt in Octantibus, hoc eſt æquationem maximam eſſe ut X^3 inversè, hoc eſt *augeri ac diminui in triplicatâ ratione diſtantiæ Solis X inversè; ideoque* &c. 121.

Scilicet poſitâ Excentricitate Orbitæ telluris $.016\frac{11}{12}$, diſtantia maxima eſt $1 + .016\frac{11}{12}$, diſtantia mediocris 1, & diſtantia minima $1 - .016\frac{11}{12}$, itaque ſumendo rationem triplicatam mediocris & maximæ diſtantiæ fiat ut $1 + 3 \times .016\frac{11}{12} + 3 \times .000285\frac{1}{3}$ &c. (1.0516) ad 1, ita 3′45″ ad quartum qui erit 3′.34″. & ſumendo rationem triplicatam inverſam mediocris & minimæ diſtantiæ fiat ut $1 - 3 \times .016\frac{11}{12}$

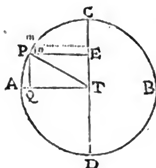
DE MUNDI SYSTEMATE.

34″, & in minima 3′. 56″ quamproximè: ubi vero apogæum lunæ situm est extra octantes, evadit minor; (z) estque ad æquationem maximam, ut sinus duplæ distantiæ apogæi lunæ à proximâ syzygiâ vel quadraturâ ad radium.

(a) Per eandem gravitatis theoriam actio solis in lunam paulo major est ubi linea recta per nodos lunæ ducta transit per solem, quam ubi linea illa ad rectos est angulos cum rectâ solem ac terram jungente. (b) Et inde oritur alia medii motus lu-

121. $+ 3 \times .000285\frac{1}{2}$ &c. (.950197) ad 1 ita 3′. 45″. ad quartum qui erit 3′. 56″.

(z) * *Estque ad æquationem maximam.* Siquidem in quâcumque distantiâ Terræ à Sole, hæc æquatio est $\frac{15\, M^2 a^3 r^9}{109.73\, S.\, A.\, X^3 x^9} \frac{f^2}{} \times - 163.595$ P Q T, liquet quod supponendo distantiam X non variari, hæc æquatio erit ubique ut P Q T; in octantibus autem P Q T est $\frac{1}{4} r^2$, hinc in quovis loco hæc æquatio est ad eam quæ in

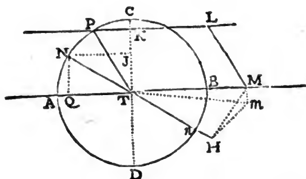


Octantibus obtineretur, manente eâdem distantiâ Solis à Terrâ ut P Q T ad $\frac{1}{4} r^2$, sive quia P Q T est $\frac{1}{2} zy$ ut $\frac{1}{2} zy$ ad $\frac{1}{4} r^2$, & utrumque ducendo per $\frac{4}{r}$ ut $\frac{2zy}{r}$ ad r, sed $\frac{2zy}{r}$ est sinus duplæ distantiæ puncti P, hoc est Apogæi à Syzygiâ, (aut à quadraturâ perinde enim est ut ex Trigonometriæ Principiis liquet) hinc æquatio in quovis situ Apogæi extra octantes est ad Æquationem maximam quæ obtineretur in Octantibus manente eâdem distantia Telluris à Sole, ut sinus duplæ distantiæ Apogæi Lunæ à proximâ Syzygiâ, ad radium.

(a) * *Per eamdem* &c. Cum linea recta per nodos ducta transit per Solem, tunc Sol versatur in plano ipsius orbitæ Lunaris producto, ejus itaque actio non consumitur in dimovendâ Lunâ ab eo plano, sed tota impenditur ad eam vel à terrâ distrahendam, vel ad terram attrahendam, vel ad eam accelerandam aut retardandam in proprio suo Plano, cum autem linea nodorum est ad angulos rectos cum rectâ solem ac terram jungente, tunc Sol maxime discedit à plano orbitæ Lunaris, hinc pars ejus actionis consumitur in admovendo Plano orbitæ Lunaris ad Eclipticam, & per residuum duntaxat ejus actionis Lunæ errores *in longum* producit; hinc priori casu actio Solis in Lunam paulò major est quam in posteriore, partem autem actionis Solis residuam sublatâ eâ ejus parte quæ in plano orbitæ Lunaris dimovendo consumitur ad calculum vocamus Probl. 1°. Calculi tertii (pag. 502.).

(b) * *Et inde oritur alia motus medii æquatio.* Hujus æquationis quantitatem & Leges Probl. III. Calculi 3ⁱ. (pag. 503.) exposuimus, illamque $\frac{3\, A.\, F.\, l^2}{8\, S.\, V.\, ar} \times \frac{2nm}{r}$ in-

lunaris æquatio, quam semestrem secundam vocabo, quæque maxima est ubi nodi in solis octantibus versantur, & evanescit ubi sunt in syzygiis vel quadraturis, & in aliis nodorum positionibus proportionalis est sinui duplæ distantiæ nodi alterutrius à proximâ syzygiâ aut quadraturâ: (c) additur vero medio motui lunæ, si sol distat à nodo sibi proximo in antecedentia, subducitur si in consequentia, & in octantibus, ubi maxima est, ascen-



invenimus, sumendo l pro sinu inclinationis orbitæ, & n & m pro sinu & Cosinu distantiæ nodorum à Syzygiâ. Hinc cum $\frac{2nm}{r}$ sit sinus duplæ distantiæ nodi à Syzygiâ, cæteri verò termini sint constantes hæc æquatio est maxima *ubi nodi in Solis octantibus versantur*, & evanescit *ubi sunt in Syzygiis vel quadraturis & in aliis nodorum positionibus proportionalis est sinui duplæ distantiæ nodi à Syzygiâ* &c.

(c) * *Additur verò medio motui Lunæ, si sol distat à nodo sibi proximo in antecedentia subducitur si in consequentia.* Ex actione Solis in Lunam, Luna retardatur, ex diminutione verò ejus actionis propter obliquitatem plani orbitæ Lunaris, diminuitur hæc Lunæ retardatio, hoc est acceleratio quædam oritur respectu motus qui, omissa hac consideratione, fuerat determinatus; mediocris acceleratio hinc nata, & quæ includitur in medio motu Solis est ubique $\frac{3 A. F. l^2}{2 S. V a r^2} \times \frac{ru}{2}$, vera autem acceleratio est $\frac{3 A. F. l^2}{2 S. V a r^2} \times ANQ$. 121.
Unde æquatio est $\frac{3 A. F. l^2}{2. S. V a r^2} \times \frac{ru}{2} - ANQ$ per Probl. III. calculi 3. (pag. 503. & seq.) jam itaque si $\frac{ru}{2}$ sit major quam ANQ quod evenit in toto quadrante ANC, acceleratio mediocris est major vera, & Luna magis processisse censetur quam revera processit, hinc ista differentia $\frac{3 A. F. l^2}{2 S. V a r^2} \times \frac{ru}{2} - ANQ$ debet detrahi ex ejus loco invento ut verus locus habeatur, in hoc autem casu Sol qui puncto A respondere censetur est in consequentia respectu nodi N.

Dum verò N versatur inter C & B, & n

cendit ad $47''$ in mediocri solis distantiâ à terrâ, (d) uti ex theoriâ gravitatis colligo. In (e) aliis solis distantiis hæc æquatio maxima in octantibus nodorum est reciprocè ut cubus dis-
121. tantiæ solis à terrâ, ideoque in perigæo solis ad $49''$ in apogæo ejus ad $45''$ circiter ascendit.

Per

n inter A & D, tunc $\frac{ru}{2}$ est minor quam ANQ, sic itaque acceleratio mediocris est minor quam acceleratio vera, ideoque differentia $\frac{3A.Fl^2}{2S.V.ar^2} \times \frac{ru}{2} - ANQ$ addi debet loco medio Lunæ, tunc autem Sol in A est in antecedentia respectu nodi proximi *n*.

3°. Dum N versatur inter B & D & *n* in A & C $\frac{ru}{2}$ excedit ANQ, sive motus mediocris excedit verum subduci itaque debet differentia, est vero in eo casu Sol in A in consequentia respectu nodi *n*.

Denique Dum N est inter D & A, $\frac{ru}{2}$ minor est quam ANQ addi itaque debet æquatio loco medio Lunæ & Sol est in Antecedentia respectu nodi N.

Ergo æquatio subducitur ex medio motu Lunæ cum Sol est in consequentia respectu nodi proximi, additur vero ei motui cum Sol est in antecedentia.

(d) * *Uti ex Theoriâ colligo*, calculus noster coroll. Probl. III. contentus, Æquationem maximam $45''.6$ exhibet, qui numerus est adeo proximus numero $47''$. quem ex Theoriâ gravitatis collegit Newtonus, ut credere facile sit ipsum hunc numerum ex Theoriâ gravitatis collegisse eâ proximè ratione quæ in calculo (pag. 501.) adhibetur, differentiola enim ista oriri potest ex eo quod, vel angulum inclinationis orbitæ, vel quantitatem *M* mensis Periodici citra actionem Solis considerati, paulo majorem fecerit quam nos.

(e) * *In aliis Solis distantiis.* Eadem plane est demonstratio ac in notâ (y) præcedente; cum æquatio sit $\frac{3AFl^2}{8SVar} \times \frac{2nm}{r}$ in diversâ Solis à Terrâ distantiâ X, loco *a* scribatur X, loco F, $\frac{a^2F}{X^2}$, loco $\frac{F}{V}$, $\frac{aM^2}{rA^2}$, æquatio evadit $\frac{3M^2a^3l^2}{8A.S.X^3r^2} \times \frac{2nm}{r}$ & in Octantibus quia $\frac{2nm}{r} = r$, Æquatio est $\frac{3M^2a^3l^2}{8A.SX^3r}$, ideoque æquationes in

Octan-

Per (f) eandem gravitatis theoriam apogæum lunæ progreditur quam maximè ubi vel cum sole conjungitur vel eidem opponitur, & regreditur ubi cum sole quadraturam facit. (g) Et eccentricitas fit maxima in priore casu & minima in posteriore, per Corol. 7, 8 & 9. Prop. LXVI. Lib. I. Et hæ inæqualitates per eadem Corollaria permagnæ sunt, & æquationem principalem apogæi generant, quam semestrem vocabo. (h) Et æquatio maxima semestris est $12^{gr}. 18'$ circiter, quantùm ex observationibus colligere potui. *Horroxius* noster lunam in ellipsi circum terram, in ejus umbilico inferiore constitutam, revolvi primus statuit. *Halleius* centrum ellipseos in epicyclo locavit, cujus centrum uniformiter revolvitur circum terram. Et (i) ex motu in epicyclo oriuntur inæqualitates jam dictæ in progressu & regressu apogæi & quantitate eccentricitatis. Dividi intelligatur distantia mediocris lunæ à terrâ in partes 100000, & refe-

Octantibus in diversâ Solis à Terrâ distantiâ, sunt inter se inverse ut X^3, si fiat itaque ut Cubus maximæ distantiæ Terræ à Sole qui est 1.0516, ad Cubum 1 mediocris distantiæ, ita $47''$ Æquatio pro mediocri distantia inventa erit ad $45''$ circiter eaque erit Æquatio in maximâ distantiâ Solis à Terrâ, & ut .950107 Cubus minimæ distantiæ, ad 1 ita $47''$ ad $49''$ circiter quæ erit Æquatio maxima cum Sol erit in Perigæo. Eâdem etiam ratione ac in notâ (z) ostendetur quomodo in quâvis Solis à Terrâ distantiâ, & in quavis positione Nodi respectu Solis Æquatio obtineri debeat.

(f) * *Per eamdem gravitatis Theoriam Apogæum Lunæ progreditur quam maximè &c.* Per Methodum ex ipsis Newtoni Principiis derivatam invenimus (pag. 505. & seq.) motum Apsidis esse ut $3yy-rr$, sumendo y pro sinu distantiæ Apsidis à quadraturâ, is ergo motus, juxta hunc calculum, evanescit cum $y\sqrt{3}=r$, cum nempe y est sinus arcus $35^{gr}.15'$, positivus verò est in syzygiis illic enim fit $3yy-rr=2rr$ negativus in Quadraturis illic enim est $3yy-rr=-rr$.

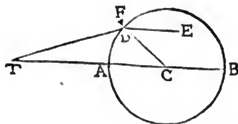
(g) * *Et excentricitas fit maxima in priore casu* cum nempe Apsides sunt in syzygiis & minima in posteriore, cum nempe *Apsides sunt in Quadraturis.* Id utique statuitur toto calculo de Excentricitate orbitæ Lunaris superius pag. 512. & seq. tradito. 121.

(h) * *Et Æquatio maxima semestris*, &c. Hanc ex observationibus determinandam liquet cum non satis feliciter obtineatur absoluta quantitas motus Apogæi per calculos secundum Newtoniana Principia institutos; Methodus autem à nobis indicata est admodum incompleta & rudis, & in ea multa quæ considerari debuissent sunt omissa, hinc cum in cæteris motibus Lunæ & Æquationibus ad votum succedat Theoria Newtoniana, in hoc casu aliquid adhuc desiderari, fatendum est.

(i) * *Et ex motu in Epicyclo.* Ingeniose & feliciter conjunctas esse unicâ constructione Geometricâ Excentricitatis variationes, & motus Apogæi æquationes, ex iis quæ de Excentricitate dicta sunt pag. 516. intelligi potest; Illic enim ostenditur quod si T C sit excentricitas media f, C B maxima excentricitatis variatio ab excentricitate mediocri, B F arcus duplus distantiæ apsidis à syzygiâ, tunc linea T F est excentricitas, ostenditur verò, Probl. II. pag. 517. variationem maxi-

DE MUNDI SYSTEMATE.

referat T terram & TC eccentricitatem mediocrem lunæ partium 5505. Producatur TC ad B, ut sit CB sinus æquationis maximæ semestris 12gr. 18′ ad radium TC, & circulus BDA centro C, intervallo CB descriptus erit epicyclus ille in quo centrum orbis lunaris locatur & secundum ordinem literarum

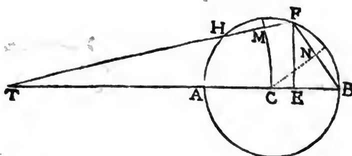


BDA revolvitur. Capiatur angulus BCD æqualis duplo argumento annuo, seu duplæ distantiæ veri loci solis ab apogæo lunæ semel æquato, & erit CTD æquatio semestris apogæi lunæ & TD eccentricitas orbis ejus in apogæum secundo æquatum tendens. Habitis autem lunæ motu medio & apogæo & eccentri-

221. mam excentricitatis quæ est A B tam ex observationibus quam consentiente calculo sumi posse 1172 partium quarum Radius orbitæ Lunaris est 100000 & excentricitas TC 5505, simul autem cum constet ex observationibus æquationem semestrem Apogæi 12gr. 18′ esse, ejus Anguli sinus est partium 1172 Radio existente partium 5505, ut liquet si fiat ut Radius 100000 ad sinum Anguli 12°. 18′ qui est 21303 ita 5505 ad quartum qui est 1172 $\frac{1}{4}$ hinc illum numerum pro maximâ variatione excentricitatis selegit Halleius, quia non procul est ab iis quos & observationes & calculus indicant, simulque est sinus anguli maximi quo discedunt Apsides à loco medio, Ergo quando BF est quadrans, ideoque Apsides octante à syzygiâ distant, sinus anguli FTB est ipsa linea CB sive 1172 $\frac{3}{4}$ dum radius TF est æqualis TC sive 5505, ergo eo in casu angulus FTB est verus discessus lineæ Apsidum à suo loco medio, & jacet TF in verâ positione lineæ apsidum, & cum TF sit excentricitas eo in loco est F in ipsâ positione centri orbitæ Lunaris; Idem proximè eveniet in quovis alio loco F; Nam cum Æquationes Apogæi (pag. 512.) sint ut sinus Arcus dupli distantiæ Apsidis à Sole, & sit FB arcus duplus distantiæ Apsidis à Sole & FE ejus sinus, æquatio maxima 12gr. 18′. debebit esse ad eam quæ huic loco F competit ut BC ad FE, sed in ea proxime sunt ratione anguli omnes FTB, hinc itaque est quam proxime TF in verâ positione lineæ Apsidum & F centrum orbitæ.

tricitate, ut & orbis axe majore partium 200000; ex his eruetur verus lunæ locus in orbe & distantia ejus à terrâ, (k) idque per methodos notissimas.

(l) In perihelio terræ, propter majorem vim solis, centrum orbis lunæ velocius movetur circum centrum *C* quam in aphelio, idque in triplicatâ ratione distantiæ terræ à sole inversè. (m) Ob æquationem centri solis in argumento annuo comprehensam, centrum orbis lunæ velocius movetur in epicyclo *BDA* in duplicatâ ratione distantiæ terræ à sole inversè. Ut idem adhuc velociùs moveatur in ratione simplici distantiæ inversè; ab orbis centro *D* agatur recta *DE* versus apogæum lunæ, seu rectæ *TC* parallela, & capiatur angulus *EDF* æqualis excessui argumenti annui prædicti supra distantiam apogæi lunæ à perigæo

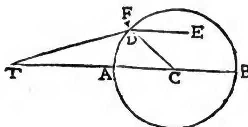


(k) * *Per Methodos notissimas.* De iis agitur Lib I. Prop. XXXI.

(l) * *In perihelio* Si nulla esset vis Solis quiescerent Apsides orbitæ Lunaris, nec mutaretur ejus excentricitas, motum itaque centri orbitæ Lunaris F in circulo BFHA vi Solari esse debitum liquet, omnes verò errores ex vi Solari ortos, esse proximè in triplicatâ ratione distantiæ terræ à Sole sæpius observatum est, hinc motus centri F orbitæ Lunaris in circulo BFHA eâ proportione variari debet.

(m) * *Ob Æquationem centri Solis in argumento annuo comprehensum &c.* Arcus FB vel arcus BD in figura Textus est duplus distantiæ Apsidis à syzygiâ, hoc est, duplus distantiæ Apsidis à Sole, itaque punctum F invenitur locum Solis à loco Apsidis tollendo, residui in consequentia duplum est arcus BF, & id residuum est argumentum annuum, fingatur apsidem immotam esse solem vero moveri, pendebit arcus BF ex motu Solis fietque major quo celerius Sol movebitur, sed motus Solis est inverse in ratione duplicatâ distantiarum Terræ à Sole (not. o), ergo motus puncti F ex hac consideratione sequitur rationem inversam duplicatam distantiæ Terræ à Sole. 121.

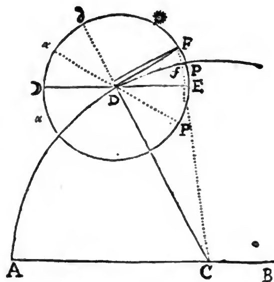
gæo ſolis in conſequentia; vel ([n]) quod perinde eſt, capiatur angulus CDF æqualis complemento anomaliæ veræ ſolis ad gradus 360. Et ſit DF ad DC ut dupla eccentricitas orbis magni ad diſtantiam mediocrem ſolis à terra, & motus medius



diurnus ſolis ab apogæo lunæ ad motum medium diurnum ſolis ab apogæo proprio conjunctim, id eſt, ut $33\frac{7}{8}$ ad 1000 & $52'. 27''. 16'''$. ad $59'. 8'''. 10''$. conjunctim, ſive ut 3 ad 100. Et

121. (n) * *Vel quod perinde eſt.* Si circa punctum D radio DF deſcribatur circulus EF$\odot$dα☽P, In quo ſit E Lunæ Apogæum e centro D ſpectatum; ☽ Lunæ Perigæum, α Apogæum Solis, P Solis perigæum, $\odot$ locus Solis, cum ex Conſtructione ſit dDE = DCB, ideoque duplum argumenti annui, ſive duplum diſtantiæ $\odot$E, erit EDC æqualis ſemicirculo dempto $2\odot E$, ſive erit $\frac{1}{2}c - 2\odot E$; Itaque ſi ei arcui EDC addatur EDF æqualis annuo argumento dempta diſtantia Apogæi Lunæ a Perigæo Solis, ſive $\odot E - PE$, fiet $CDF = \frac{1}{2}c - \odot E - PE$, ſed cum $\frac{1}{2}c$ ſit æqualis diſtantiæ Perigæi Solis ab ejus Apogæo erit $\frac{1}{2}c = PE\odot\alpha$, ex quo itaque detracto PE & E$\odot$, eſt $CDF = \odot\alpha$ ſive diſtantiæ Solis ab Apogæo in antecedentia, aut quod idem eſt complemento ad 360 gr. arcus α☽PEF$\odot$, qui arcus eſt diſtantia Solis ab Apogæo ſuo, in conſequentia ſumpta, quæ eſt Solis anomalia vera.

Si punctum P foret in conſequentia reſpectu puncti E, tunc EDF faciendus eſſet æqualis argumento annuo addita diſtantia Perigæi Solis à Lunâ, ſicque fieret $CDF = \frac{1}{2}c - \odot + PE$ & quoniam in eo



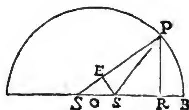
caſu eſt $\frac{1}{2}c = P\odot$☽α, & $-\odot E + PE = -P\odot$, erit $CDF = \odot$☽α, ſive erit diſtantia Solis ab Apogæo in Antecedentia poſito, hoc eſt, complementum ad 360 gr. arcûs α☽PEF$\odot$, qui arcus eſt diſtantia Solis ab Apogæo ſuo in conſequentia ſumpta, quæ eſt Solis anomalia vera.

Et concipe centrum orbis lunæ locari in puncto F, & in epicyclo, cujus centrum est D, & radium DF, interea revolvi dum punctum D progreditur in circumferentiâ circuli $DABD$. Hâc (°) enim ratione velocitas, quâ centrum orbis lunæ in lineâ quâdam curvâ circum centrum C descriptâ movebitur, erit reciprocè ut cubus distantiæ solis à terrâ quamproximè, ut oportet.

Com-

(o) * *Hâc enim ratione.* Æquationem hujus motus centri orbis Lunaris quæ adhibenda est ut moveatur velocius quam per primam constructionem, idque in simplici ratione distantiæ inversè esse proportionalem æquationi centri Solis constat eadem demonstratione quâ in notis m & n pag. 519. de Æquationibus annuis Apogæi & nodi idem probatum fuit.

Dicatur a mediocris distantia Terræ à Sole, quævis alia distantia dicatur $a \pm x$, motus medius centri orbis Lunaris in distantia a fit o, & quia ille motus est in triplicatâ ratione distantiæ Solis à Terra inversè, in aliâ quavis distantiâ Terræ à Sole erit $\frac{a^3}{\overline{a \pm x}^3} o$ & formando seriem, erit $o \mp \frac{3x}{a} o$, sed si fingeretur eum motum sequi proportionem inversam duplicatam distantiarum, inveniretur is motus singulis in locis $o \mp \frac{2x}{a} o$, & ita assumptus fuerat in primâ constructione (vid. not. *m* præced.), ergo singulo in loco error commissus per hanc fictionem foret $\mp \frac{x}{a} o$; Pariter si Solis motus medius dicatur m ostensum est (not. *n* pag. 519. 520) differentiam inter motum medium & verum esse $\mp \frac{2x}{a} m$; Ideoque cum ratio $\mp \frac{x}{a} o$ ad $\mp \frac{2x}{a} m$, sit in singulis punctis x eadem, Æquatio ex errore $\mp \frac{x}{a} o$ orta erit proportionalis Æquationi ex $\mp \frac{2x}{a} m$ ortæ, hoc est erit proportionalis Æquationi centri Solis; Sed Æquatio centri Solis, est quamproximè proportionalis sinui anomaliæ Solis not. 372. Lib. I. nam illic demonstratur quod si ex utroque foco S & ſ orbitæ 121.



Solis ducantur lineæ ad punctum P erit BſP anomalia media, & BSP anomaliæ vera, ideoque angulus SPſ erit Æquatio, ducatur ergo ex ſ in SP perpendiculum ſE & ex P perpendiculum PR ob similitudinem Triangulorum SſE & ſPR erit, SP ad PR ut Sſ ad ſE, sive sumendo SP pro radio constanti (quod est proximè verum) erit, ut Radius ad Sinum Anomaliæ veræ ita dupla excentricitas ad sinum æquationis Solis, sive ad ipsam Æquationem, nam in parvis angulis, arcus pro sinubus sumi possunt. Hinc sinus anomaliæ veræ est ad æquationem centri Solis in Ratione datâ radii nempe ad duplam excentricitatem, hinc itaque, Æquatio orta ex errore $\mp \frac{x}{a} o$, erit ut sinus Anomaliæ Solis, sed

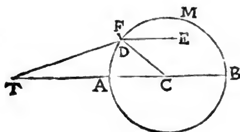
 An-

Computatio motus hujus difficilis est, sed facilior reddetur per approximationem sequentem. Si distantia mediocris lunæ à terra sit partium 100000, & eccentricitas *TC* sit partium 5505 ut supra: recta *CB* vel *CD* invenietur partium $1172\frac{3}{4}$ & recta *DF* partium $35\frac{1}{5}$. Et hæc recta ad distantiam *TC* subtendit angulum ad terram quem translatio centri orbis à loco *D* ad locum *F* generat in motu centri hujus: & eadem recta duplicata

121. Angulus C D F est complementum ejus anomaliæ ad 360 gr. sinus autem arcus alicujus & sinus ejus complementi ad 360 gr. sunt unum & idem, ergo Æquatio ex errore $\mp \frac{x}{a} o$ nata est proportionalis sinui angulorum C D F & si sumatur Radius D F æqualis æquationi maximæ hinc natæ, cæteri omnes sinus angulorum C D F erunt ipsæ æquationes in data Solis anomalia, si itaque sumantur à puncto D arcus D f in circulo B D A æquales illis sinubus, erit f verus locus centri orbitæ Lunaris, & quia ob exiguitatem horum sinuum respectu radii C D, linea per C & f ducta cadit etiam in F sumi potest F ut verus locus centri orbitæ Lunaris.

Invenitur autem Æquatio maxima orta ex errore $\mp \frac{x}{a} o$; si attendatur quod Solis motus est ubique $m \mp \frac{2x}{a} m$, sive $m \mp \frac{x}{a} \times 2m$ ideoque summam omnium errorum ex errore $\frac{x}{x} o$ fore ad summam omnium errorum in Solis motu genitorum ut o ad $2m$, sive Æquationem quæsitam esse ad Æquationem Solis ut est motus centri orbitæ Lunaris per circulum B D A ad duplum motum medium Solis respectu sui Apogæi, sed quoniam arcus B D sunt semper dupli distantiæ Solis ab Apogæo Lunæ motus

cata in ſitu parallelo ad diſtantiam ſuperioris umbilici orbis lunæ à terra, ſubtendit eundem angulum, quem utique tranſlatio illa generat in motu umbilici, & ad diſtantiam lunæ à terrâ (p) ſubtendit angulum quem eadem tranſlatio generat in motu lunæ, quique propterea æquatio centri ſecunda dici poteſt. Et hæc æquatio, in mediocri lunæ diſtantia à terrâ, eſt ut ſinus anguli, quem recta illa *DF* cum recta à puncto *F* ad lunam ducta continet quamproximè, & ubi maxima eſt evadit 2′.

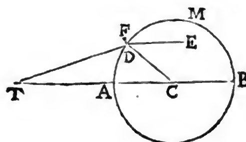


tus diurnus centri orbis Lunaris per circulum BDA eſt etiam duplus motus Solis ab Apogæo Lunæ, hinc Æquatio quæſita eſt ad maximam Æquationem Solis ut eſt radius DC ad diſtantiam mediocrem Solis à Terra & ut duplus motus diurnus Solis ab Apogæo Lunæ ad duplum motum diurnum Solis ab Apogæo ſuo conjunctim, maxima autem Solis Æquatio eſt ipſa dupla excentricitas orbis magni, hinc Æquatio quæſita ſive radius DF eſt ad duplam excentricitatem ut DC ad diſtantiam mediocrem Solis à Terra. & ut motus diurnus Solis ab Apogæo Lunæ ad motum diurnum Solis ab Apogæo ſuo conjunctim, undè viciſſim eſt etiam DF ad DC ut dupla excentricitas ducta per motum diurnum Solis ab Apogæo Lunæ, ad diſtantiam mediocrem Solis à Terrâ ductam per motum diurnum Solis ab Apogæo ſuo.

(p) * *Subtendit angulum quem eadem tranſlatio generat in motu Lunæ.* Scilicet tota orbita Lunæ, ipſaque Luna per motum centri orbitæ ex D in F tranſlatum ex proprio loco mota cenſeri debet in locum alium per lineam ipſius DF duplam ipſique Parallelam, cum itaque diſtantia mediocris ſit partium 100.000, ſi hæc linea quæ duplicata eſt 70.4, angulum rectum cum linea à Terra ducta efficiat quo caſu maximam æquationem facit, ipſa ſubtendet angulum 2′ 25″ ſiquidem ſinus duorum minutorum eſt 58.18 ſinus trium 87.27. In aliis autem hujus lineæ poſitionibus reſpectu lineæ à Terrâ ductæ, anguli quos ſubtendet erunt ad iſtum ut eſt ſinus Anguli quem facit cum lineis à Terrâ ductis ad Radium; Nam in Triangulis in quibus duæ lineæ ſunt conſtantes ſed earum angulus variabilis, ſi una ex iis lineis alterius reſpectu ſit minima, Tertia linea pro conſtante aſſumi poteſt, eſt verò ad minimam lineam, ut ſinus anguli variabilis ad ſinum anguli oppoſiti minimæ lineæ; hinc ſinus anguli variabilis & ſinus anguli minimi ſunt in ratione datâ. Ergo ut ſinus 121.

DE MUNDI SYSTEMATE.

2'. 25''. (q) Angulus autem quem recta *D F* & recta à puncto *F* ad lunam ducta comprehendunt, invenitur vel subducendo angulum *E D F* ab anomalia media lunæ, vel addendo distantiam lunæ à sole ad distantiam apogæi lunæ ab apogæo so-



lis. Et ut radius est ad sinum anguli sic inventi, ita 2'. 25''. sunt ad æquationem centri secundam, addendam, si summa illa sit minor semicirculo, subducendam si major. Sic habebitur ejus longitudo in ipsis luminarium syzygiis.

Cum

121. sinus Anguli recti sive Radius ad 2'. 25''. ita sinus anguli quem facit linea à terrâ ducta cum lineola Parallela ad D F, ad angulum quo locus Lunæ mutatus cernitur.

(q) * *Angulus autem quem* facit linea à terrâ ducta cum lineola Parallela ad D F, & in ipso loco Lunæ posita, æqualis est illi quem facit recta D F & recta à puncto F ad Lunam ducta, saltem proximè quia F est centrum orbitæ Lunaris à quo Terra non multum distat; Fingatur, produci lineam D F & ex puncto F duci lineam Parallelam lineæ D E, quæ ad Apogæum Lunæ tendit, & ex eodem puncto F aliam duci lineam ad Lunam, angulus hujus lineæ cum linea D E erit anomalia media Lunæ ergo angulus hujus lineæ cum linea D F producta erit differentia anguli E D F & anomaliæ mediæ Lunæ, sive quia erat E D F differentia argumenti annui, & distantiæ Apogæi Lunæ à Perigæo Solis si ex Anomalia media Lunæ tollatur argumentum annuum superest distantiæ Lunæ à Sole, cui addi debet distantia Apogæi Lunæ & Perigæi Solis, sive (quia semi circuli additi vel detracti non mutant valores Angulorum eorumque sinuum) distantia Apogæi Lunæ & Apogæi Solis: cætera facile patebunt ex figuræ descriptione; Exemplum esto in conjunctione ubi est ☉ locus Solis & Lunæ, liquet enim quod quando punctum ☉ est in consequentia respectu puncti F, Luna quæ transfertur per lineam parallelam lineæ D F transfertur in Antecedentia; dum è contrà punctum ☉ est in antecedentia respectu puncti F, Luna transfertur in consequentia; est vero F☉ = P E, cum ergo A L est major semicirculo, ut in figura, tunc P E sive F☉ est minor semicirculo, est ergo ☉ in consequentia respectu puncti F, hinc subducenda est ea Æquatio; sit verò A E minor semicirculo-

Cum atmosphæra terræ ad usque altitudinem milliarium 35 vel 40 refringat lucem solis, & refringendo spargat eandem in umbram terræ, & spargendo lucem in confinio umbræ dilatet umbram: (r) Ad diametrum umbræ, quæ per parallaxim prodit, addo minutum unum primum in eclipsibus lunæ, vel minutum unum cum triente.

Theoria vero lunæ primò in syzygiis, deinde in quadraturis, & ultimò in octantibus per phænomena examinari & stabiliri debet. Et opus hocce aggressurus motus medios solis & lunæ ad tempus meridianum in observatorio regio *Grenovicensi*, die ultimo mensis *Decembris* anni 1700. st. vet. non incommodè sequentes adhibebit: nempe motum medium solis ♑ 20gr. 43'. 40''., & apo-

lo erit PE major semicirculo ut & F☉, ideoque est ☉ in antecedentia respectu F promovetur itaque Luna propter hanc Æquationem; cæterum non tantum in luminarium Syzygiis, sed ad cæteros Lunæ adspectus hæc adaptari possunt, verum commodius est Astronomis, Theoriam suam ex syzygiarum observationibus explorare & constituere.

(r) * *Ad diametrum umbræ.* Parallaxis est angulus qui subtenditur per semi-Diametrum terræ ex Luna spectatæ; Jam vero propter atmosphæræ actionem in radios lucis idem evenit respectu umbræ ac si semi-Diameter terræ 35 vel 40 milliaribus augeretur, nam radii illàc pergentes rectam viam non sequuntur, sed introrsum in umbram conjiciuntur, hinc carens 121.

& apogæi ejus ♋ $7^{gr.}\ 44'.\ 30''$, & motum medium lunæ ♒ $15^{gr.}\ 21'.\ 00''.$, & apogæi ejus ♓ $8^{gr.}\ 20'.\ 00''$, & nodi ascendentis ☊ $27^{gr.}\ 24'.\ 20''.$; & differentiam meridianorum observatorii hujus & observatorii regii *Parisiensis* $0^{hor.}\ 9^{min.}\ 20^{sec.}$ motus autem medii lunæ & apogæi ejus nondum satis accuratè habentur.

321. carent radiis solaribus loca quæ trans Atmosphæram eos recipere deberent, fungitur ergo Atmosphæra vice corporis opaci, & umbra ea de causa dilatari debet quasi semi-Diameter terræ in 35 vel 40 milliaribus foret aucta.

ERRATA.

Pag. 400. Not. col. 2. lin. 8. & pag. 402. N. col. 1. l. 2. *pro* 110. *lege* 112. Pag. 498. Not. col. 1. l. 17. & 18. Luna *lege* Terra. *Ibid.* col. 2. l. 8. quæ factam erit *lege* factam, quæ erit. Pag. 500. col. 1. l. 27. *pro* 107.48. *lege* 108.48. Pag. 501. col. 1. linea 5ª. ante ultimam $\frac{1}{2}r^2$ *lege* $\frac{1}{4}r^2$. *Ibid.* lineâ 4ª. ante ultimam & ultimâ & col. 2. lin. 2. *pro* 40.449375 *lege* 40.89875, *ibidem*, *pro* 5.52939 *lege* 5.59082. *Ibid.* lin. 3. *pro* .0011297456r *lege* .001144878 2r. *Ibid.* lin. 5. *pro* .06372125 *lege* .065590872. *Ibid.* lin. 6. *pro* 3'82338. & *pro* .82338. *lege* 3'.9354. & .9354. Lin. 7. *pro* 49''4. *lege* 56''. Lin. 8. *pro* 3'.49''. *lege* 3'.56''. Lin. 30. *pro* 3'' *lege* 11''. Pag. 502. col. 1. lin. 28. *pro* graduum 5.19'.36''. *lege* graduum 5°.19'.30''.

Serò quidem hæc tertii libri continuatio in lucem prodit propter varia Editoris negotia, citiùs edetur ultima hujus libri continuatio, quoniam ejus operâ nimis tardè non utemur in posterum.



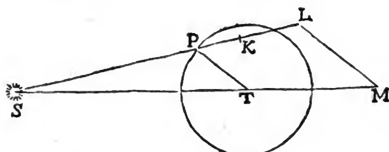
PHI-

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

LIBRI TERTII CONTINUATIO II.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XVII.

Invenire vim Solis ad Mare movendum.



SOlis vis *ML* seu *PT*, in quadraturis lunaribus, ad perturbandos motus lunares erat (per Prop. xxv. hujus) ad vim gravitatis apud nos, ut 1. ad 638092,6. Et vis *TM–LM* seu 2 *PK* in syzygiis lunaribus est duplo major. Hæ autem vires, si descendatur ad superficiem terræ, diminuuntur in ratione distantiarum à centro terræ, id est, in (z) ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; ideo-

(z) * *In ratione* $60\frac{1}{2}$ *ad* 1. Quemadmodùm in prop. 25ª. demonstratum est eam partem vis centripetæ Lunaris in Solem quâ motus ejus circà terram perturbatur

121.

ideoque vis prior in ſuperficie terræ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 38604600. Hac vi mare deprimitur in locis, quæ 90 gradibus diſtant à ſole. Vi alterâ, quæ duplo major eſt, mare elevatur & ſub ſole & in regione ſoli oppoſitâ. (x) Summa virium eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, ſive ea deprimat aquam in regionibus quæ 90 gradibus diſtant à ſole, ſive elevet eandem in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis, hæc ſumma erit tota ſolis vis ad mare agitandum; & eundem habebit effectum, ac ſi tota in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 gradibus diſtant à ſole nil ageret.

Hæc eſt vis ſolis ad mare ciendum in loco quovis dato, ubi ſol tam in vertice loci verſatur quam in mediocri ſuâ diſtantiâ à terrâ. (a) In aliis ſolis poſitionibus vis ad mare attollendum eſt ut ſinus verſus duplæ altitudinis ſolis ſupra horizontem loci directè & cubus diſtantiæ ſolis à terrâ inversè.

Ce-

121. batur & quæ radio orbitæ Lunaris erat proportionalis, eſſe ad vim centripetam Lunæ in terram in duplicatâ ratione temporum periodicorum terræ circà Solem & Lunæ circà terram, ſimili plane modo probatur eam quoquè partem vis centripetæ in Solem quæ analoga eſt radio terræ eſſe ad vim centripetam Lunæ in terram in ratione radii terræ ad radium orbitæ Lunaris directè & ratione duplicatâ temporis periodici terræ circà Solem ad tempus periodicum Lunæ circà terram inversè. Quarè vires Solis ad perturbandos motus corporum prope ſuperficiem terræ ſunt ad vires Solis ad perturbandos motus Lunæ ut radius terræ ad radium orbitæ Lunaris, hoc eſt, ut 1 ad 60 $\frac{1}{2}$.

(x) * *Summa virium* eſt ad vim gravitatis ut 3 ad 38604600 ſive ut 1 ad 12868200.

(a) * *In aliis Solis poſitionibus.* Hâc vi aqua maxime deprimitur ubi Sol verſatur in horizonte & maxime elevatur ubi Sol in vertice loci verſatur. Depreſſio autem & elevatio aquarum magis ac magis decreſcit quò altiùs Sol aſcendit ſuprà horizontem, aut à vertice deſcendit. Præterea hæc depreſſio aut elevatio circa initium & finem lentiùs, circà medium verò celeriùs minuitur; ſed hæc contingent ſucceſſiva aquarum incrementa & decrementa, ſi vis maxima Solis in vertice loci exprimatur per diametrum circuli, hoc eſt, per per ſinum verſum 180°. ſeù duplæ altitudinis Solis ſuprà horizontem, in aliis autem Solis poſitionibus vis eadem exhibeatur per ſinus verſos altitudinum duplicatarum; Quarè in variis Solis poſitionibus, vis ad marè attollendum ſumi poteſt ut ſinus verſus duplæ altitudinis Solis ſuprà horizontem, ſeclusâ tamen perturbatione quæ ex variâ Solis à tellure diſtantiâ oritur. At vis Solis augetur vel minuitur quò propiùs ad terram accedit aut longiùs ab eâ recedit, idque in ratione triplicatâ diſtantiarum inversâ (cor. 14. prop. 66. lib. 1.) conſiderari itaque poterit, vis Solis ad mare attollendum ut ſinus verſus duplæ altitudinis Solis ſuprà horizontem loci directè & cubus diſtantiæ Solis à Terrâ inversè. Cæterùm tota hæc propoſitio eleganter admodùm calculo tractata legitur in tribus Diſſertationibus quæ Tom. 3°. adjectæ ſunt.

Corol. Cum vis centrifuga partium terræ à diurno terræ motu oriunda, quæ est ad vim gravitatis ut 1 ad 289, efficiat ut altitudo aquæ sub æquatore superet ejus altitudinem sub polis mensurâ pedum *Parisiensium* 85472, ut supra in prop. XIX; vis solaris de quâ egimus, cum sit ad vim gravitatis ut 1. ad 12868200, atque ideo ad vim illam centrifugam ut 289 ad 12868200 seu 1 ad 44527, (b) efficiet ut altitudo aquæ in regionibus sub sole & soli oppositis superet altitudinem ejus in locis, quæ 90 gradibus distant à sole, mensurâ tantùm pedis unius *Parisiensis* & digitorum undecim cum tricesimâ parte digiti. Est enim hæc mensura ad mensuram pedum 85472 ut 1 ad 44527.

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XVIII.

Invenire vim lunæ ad mare movendum.

(c) Vis lunæ ad mare movendum colligenda est ex ejus proportione ad vim solis, & hæc proportio colligenda est ex proportione motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante ostium fluvii *Avonæ* ad lapidem tertium infra *Bristolium*, tempore verno & autumnali totus aquæ ascensus in conjunctione & oppositione luminarium, observante *Samuele Sturmio*, est pedum plus minus 45, in quadraturis autem est pedum tantum 25. Altitudo prior ex summa virium, posterior ex earundem differen-

(b) * *Efficiet ut altitudo aquæ.* Quoniam ex variis pendulorum observationibus & nuperrime institutis gradûs meridiani mensuris sub circulo polari, terra altior est sub æquatore quam ex Theoriâ Newtonianâ prodiit (prop. 19. lib. hujus) pauló augenda erit altitudo aquæ in hoc corollario definita. Observandum autem est corollarium illud rigorosè verum non esse; Newtonus enim ex differentiâ diametri æquatoris & axis terræ per simplicem proportionem colligit altitudinem aquæ ex vi Solis oriundam; uterque tamen casus est longè diversus, primus siquidem 121.
pendet à quadraturâ circuli, alter verò refertur ad quadraturam hyperbolæ (ut patet ex cor. 2. prop. 90. lib. 1. & not. 106. lib. hujus). Sed quam parùm à veritate discrepet præsens corollarium apparet ex computo inito in Dissertatione Clariss. Macclaurin prop. 5.

(c) * *Vis Lunæ ad Mare movendum.* Vid. cap. 6. num. 10. in Dissertatione Clariss. Bernoullii & prop. 9. in Dissertatione Clariss. Macclaurini.

DE MUNDI SYSTEMATE. rentiâ oritur. Solis igitur & lunæ in æquatore versantium & mediocriter à terrâ distantium sunto vires S & L, & erit L+S ad L−S ut 45 ad 25, seu 9 ad 5.

In portu *Plymuthi* æstus maris ex observatione *Samuelis Colepressi* ad pedes plus minus sexdecim altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno & autumnali altitudo æstus in syzygiis superare potest altitudinem ejus in quadraturis pedibus plus septem vel octo. Si maxima harum altitudinum differentia sit pedum novem, erit L+S ad L−S ut $20\frac{1}{2}$ ad $11\frac{1}{2}$ seu 41 ad 23. Quæ proportio satis congruit cum priore. Ob magnitudinem æstus in portu *Bristoliæ*, observationibus *Sturmii* magis fidendum esse videtur, ideoque donec aliquid certius constiterit, proportionem 9 ad 5 usurpabimus.

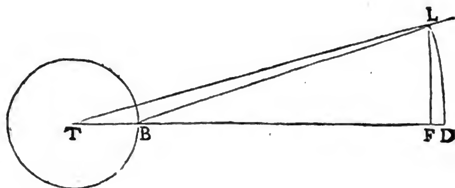
Cæterum ob aquarum reciprocos motus, æstus maximi non incidunt in ipsas luminarium syzygias, sed sunt tertii à syzygiis ut dictum fuit, seu proximè sequuntur tertium lunæ post syzygias appulsum ad meridianum loci, vel potius (ut à *Sturmio* notatur) sunt tertii post diem novilunii vel plenilunii, seu post horam à novilunio vel plenilunio plus minus duodecimam, ideoque incidunt in horam à novilunio vel plenilunio plus minus quadragesimam tertiam. Incidunt vero in hoc portu in horam septimam circiter ab appulsu lunæ ad meridianum loci; ideoque proximè sequuntur appulsum lunæ ad meridianum, ubi luna distat à sole vel ab oppositione solis gradibus plus minus octodecim vel novemdecim in consequentia. Æstas & hyems maxime vigent, non in ipsis solstitiis, sed ubi sol distat à solstitiis decimâ circiter parte totius circuitus, seu gradibus plus minus 36 vel 37. Et similiter maximus æstus maris oritur ab appulsu lunæ ad meridianum loci, ubi luna distat à sole decimâ circiter parte motus totius ab æstu ad æstum. Sit distantiâ illa graduum plus minus $18\frac{1}{2}$. Et (d) vis solis in hâc distantiâ lunæ à syzygiis & quadraturis, minor erit ad augendum & ad minuendum motum

221. (d) * *Et vis Solis.* Hanc virium proportionem non multùm à verò differre patet ex iis quæ immediatè præcedunt.

motum maris à vi lunæ oriundum, quam in ipsis syzygiis & quadraturis, in ratione radii ad sinum complementi distantiæ hujus duplicatæ seu anguli graduum 37, hoc est, in ratione 10000000 ad 7986355. Ideoque in analogia superiore pro S scribi debet 0,7986355 S.

Sed & vis lunæ in quadraturis, ob declinationem lunæ ab æquatore, diminui debet. Nam luna in quadraturis, vel potius in gradu $18\frac{1}{2}$ post quadraturas, in declinatione graduum plus minus 22. 13′ versatur. Et luminaris ab æquatore declinantis vis ad mare movendum diminuitur (e) in duplicatâ ratione sinus complementi declinationis quamproximè. Et propterea vis lunæ in his quadraturis est tantùm 0,8570327 L. Est igitur L+0,7986355S ad 0,8570327L−0,7986355S ut 9 ad 5.

(f) Præterea diametri orbis, in quo lunâ sine eccentricitate moveri deberet, sunt ad invicem ut 69 ad 70; ideoque distantia



(e) 122 * *In duplicatâ ratione.* Sit TBD planum æquatoris, T centrum telluris, sitque Luna in L, erit angulus LBD, mensura declinationis ab æquatore, seu, ob exiguum angulum TLB, erit declinatio illa quamproximè æqualis angulo LTD, cujus anguli cosinus est TF, sumpto TL, pro radio. Jam vis quæ aquam in loco æquatoris B, directè trahit à centro T, ubi Luna versatur in plano æquatoris in D, est ad vim quæ eandem aquam directè à centro trahit, ubi Lunæ est in L; ut TL ad TF, hoc est, ut radius ad sinum complementi declinationis LTD, sepositâ vi aquæ centripetâ versus T. Sed, auctâ vi illâ centripetâ, in eâdem ratione minuitur vis altera aquam à centro trahens; Quare, componendo, vis Lunæ in loco D, est ad vim ejus in L, ut quadratum sinûs totiùs TL, ad quadratum sinûs complementi TF, declinationis Lunæ LTD. 122.

(f) * *Præterea diametri orbis.* (Prop. 28. Lib. hujus).

DE MUNDI SYSTEMATE.

tia lunæ à terrâ in ſyzygiis eſt ad diſtantiam ejus in quadraturis ut 69 ad 70, cæteris paribus. Et diſtantiæ ejus in gradu $18\frac{1}{2}$ à ſyzygiis, ubi æſtus maximus generatur, & in gradu $18\frac{1}{2}$ à quadraturis, ubi æſtus minimus generatur, ſunt ad mediocrem ejus diſtantiam ut 69,098747 & 69,897345 ad $69\frac{1}{2}$. (g) Vires autem lunæ ad mare movendum ſunt in triplicatâ ratione diſtantiarum inversè, ideoque vires in maximâ & minimâ harum diſtantiarum ſunt ad vim in mediocri diſtantia ut 0,9830427 & 1,017522 ad 1. (h) Unde fit $1,017522L + 0,7986355\,S$ ad $0,9830427 \times 0,8570327L - 0,7986355\,S$ ut 9 ad 5. Et S ad L ut 1 ad 4,4815. Itaque cum vis ſolis ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400.

Corol. 1. Cum aqua vi ſolis agitata aſcendat ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum cum triceſimâ parte digiti, eâdem vi lunæ aſcendet ad altitudinem octo pedum & digitorum $\frac{5}{22}$, & vi utrâque ad altitudinem pedum decem cum ſemiſſe, & ubi luna eſt in perigæo ad altitudinem pedum duodecim cum ſemiſſe & ultra, præſertim ubi æſtus ventis ſpirantibus adjuvatur. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos abundè ſufficit, & quantitati motuum probè reſpondet. Nam in maribus quæ ab oriente in occidentem latè patent, uti in mari *Pacifico*, & maris *Atlantici* & *Æthiopici* partibus extra tropicos, aqua attolli ſolet ad altitudinem pedum ſex, novem, duodecim vel quindecim. In mari autem *Pacifico*, quod profundius eſt & latius patet, æſtus dicuntur eſſe majores quam in *Atlantico* & *Æthiopico*. Etenim ut (i) plenus ſit æſtus, latitudo maris ab oriente in occidentem non minor eſſe debet quam graduum nonagin-

122. (g) * *Vires autem Lunæ.* (Cor. 14. Prop. 66. Lib. 1.).

(h) * *Undè fit.* Ut ex hâc analogiâ vis L Lunæ colligi poſſit ducenda ſunt media & extrema, hæcque orietur æquatio $1.017522\,L \times 5 + 0.7986355\,S \times 5 = 0.9830427 \times 9 \times 0.857032\,L - 0.7986355\,S \times 9$; & tranſponendo hæc habetur proportio $S : L = 0.9830427 \times 0.8570327 \times 9 - .017522 \times 5 : 0.7986355 \times 5 + 0.7986355 \times 9$. Jam verò ſumptis horumce numerorum Logarithmis, & quæſitis reſpondentibus numeris in vulgaribus Logarithmorum tabulis, prodit S ad L ut 1 ad 4.4815 quamproximè.

(i) * *Ut plenus ſit æſtus.* (109).

naginta. In mari *Æthiopico* aſcenſus aquæ intra tropicos minor eſt quam in zonis temperatis, propter anguſtiam maris inter *Africam* & auſtralem partem *Americæ*. In medio mari aqua nequit aſcendere, niſi ad littus utrumque & orientale & occidentale ſimul deſcendat: cum tamen vicibus alternis ad littora illa in maribus noſtris anguſtis deſcendere debeat. Eâ de causâ fluxus & refluxus in inſulis, quæ à littoribus longiſſime abſunt, perexiguus eſſet ſolet. In portubus quibuſdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadoſa, ad ſinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus debent eſſe ſolito majores, uti ad *Plymuthum* & pontem *Chepſtowæ* in *Anglia*; ad montes *S. Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Auranches*) in *Normannia*; ad *Cambaiam* & *Pegu* in *India* orientali. His in locis mare, magnâ cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat nunc arida relinquit ad multa milliaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi poteſt, quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40, vel 50 & amplius. Et par eſt ratio fretorum oblongorum & vadoſorum, uti *Magellanici* & ejus quo *Anglia* circundatur. Æſtus in hujuſmodi portubus & fretis per impetum curſus & recurſus ſupra modum augetur. Ad littora vero quæ deſcenſu præcipiti ad mare profundum & apertum ſpectant, ubi aqua ſine impetu effluendi & remeandi attolli & ſubſidere poteſt, magnitudo æſtus reſpondet viribus ſolis & lunæ.

Corol. 2. Cum vis lunæ ad mare movendum ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400, perſpicuum eſt quod vis illa ſit longè minor quam quæ vel in experimentis pendulorum, vel in ſtaticis aut hydroſtaticis quibuſcunque ſentiri poſſit. (k) In æſtu ſolo marino hæc vis ſenſibilem edit effectum.

Co-

(k) * *In æſtu ſolo marino.* Hæ quidem vires ad movendum mare ſufficiunt, ſed alios effectus ſenſibiles producere non poſſunt. Etenim granum unum cum pondere granorum 4000 etiam accuratiſſimâ librâ comparatum ſentiri vix poteſt, vis autem Solaris eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, ſummaque virium Solis & Lunæ eſt ad eandem vim gravitatis ut 1 ad 2032890. Quare patet vires illas licet conjunctas multò minores eſſe quam ut pondus corporis cujuſvis in Librâ appenſi ſenſibiliter augere vel minuere poſſint. Unde nec in experimentis pendulorum, Baro- 122.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Corol. 3. Quoniam vis lunæ ad mare movendum eſt ad ſolis vim conſimilem ut 4,4815 ad 1, & vires illæ (per corol. 14. prop. LXIV. lib. 1.) ſunt ut denſitates corporum lunæ & ſolis & cubi diametrorum apparentium conjunctim; denſitas lunæ erit ad denſitatem ſolis ut 4.4815 ad 1 directè, & cubus diametri lunæ ad cubum diametri ſolis inversè: id eſt (cum diametri mediocres apparentes lunæ & ſolis ſint 31'. 16''$\frac{1}{2}$ & 32'. 12'') ut 4891 ad 1000. (l) Denſitas autem ſolis erat ad denſitatem terræ ut 1000 ad 4000; & propterea denſitas lunæ eſt ad denſitatem terræ ut 4891 ad 4000 ſeu 11 ad 9. Eſt igitur corpus lunæ denſius & magis terreſtre quam terra noſtra.

Corol. 4. Et cum vera diameter lunæ ex obſervationibus aſtronomicis ſit ad veram diametrum terræ ut 100 ad 365; erit maſſa lunæ ad maſſam terræ ut 1 ad 39,788.

Corol. 5. Et (m) gravitas acceleratrix in ſuperficie lunæ erit quaſi triplo minor quam gravitas acceleratrix in ſuperficie terræ.

Corol. 6. (n) Et diſtantia centri lunæ à centro terræ erit ad diſtantiam centri lunæ à communi gravitatis centro terræ & lunæ, ut 40,788 ad 39,788.

(o) *Corol* 7. Et mediocris diſtantia centri lunæ à centro terræ in octantibus lunæ erit ſemidiametrorum maximarum terræ 60$\frac{2}{5}$ quamproximè. Nam terræ ſemidiameter maxima fuit pedum *Pariſienſium* 19658600, & mediocris diſtantia centrorum terræ & lunæ, ex hujuſmodi diametris 60$\frac{2}{5}$ conſtans, æqualis eſt pedibus 1187379440. Et hæc diſtantia (per corollarium ſupe-

122. Barometrorum, vel in ſtaticis aut hydroſtaticis ſenſibiles edent effectus. Idem corollarium eleganter demonſtravit Clariſſ. Eulerus num. 30. Diſſertationis de fluxu & refluxu maris.

(l) * *Denſitas autem Solis.* (Cor. 3. Prop. 8. Lib. hujus).

(m) * *Et gravitas acceleratrix.* Nam gravitas acceleratrix eſt ut maſſa directè & quadratum diſtantiæ à centro, hoc eſt, ſemidiametri inverse (cor. 1. prop. 75. lib. 1.). Ideòque gravitas acceleratrix in ſuperficie Lunæ eſt ad gravitatem acceleratricem in ſuperficie terræ ut 1 × 13324 ad 39.788×1000, hoc eſt, ut 1 ad 3 circiter.

(n) * *Et diſtantia centri Lunæ.* (61. Lib. 1.).

(o) * *Coroll.* 7. Computum eodem plane modo initur ac in prop. 4. lib. hujus.

superius) est ad distantiam centri lunæ à communi gravitatis centro terræ & lunæ, ut 40,788 ad 39,788: ideoque distantia posterior est pedum 1158268534. Et cum luna revolvatur, respectu fixarum, diebus 27, horis 7, & minutis primis $43\frac{4}{5}$; sinus versus anguli, quem luna tempore minuti unius primi describit, est 12752341, existente radio 1000,000000,000000. Et ut radius est ad hunc sinum versum, ita sunt pedes 1158268534 ad pedes 14,7706353. Luna igitur vi illa, qua retinetur in orbe, cadendo in terram, tempore minuti unius primi describet pedes 14,7706353. Et augendo hanc vim in ratione $178\frac{29}{40}$ ad $177\frac{29}{40}$, habebitur vis tota gravitatis in orbe lunæ per Corol. Prop. III. Et hac vi luna cadendo tempore minuti unius primi describet pedes 14,8538067. Et ad sexagesimam partem distantiæ lunæ à centro terræ, id est ad distantiam pedum 197896573 à centro terræ, corpus grave tempore minuti unius secundi cadendo describet etiam pedes 14,8538067. Ideoque ad distantiam pedum 19615800, quæ sunt terræ semidiameter mediocris, grave cadendo describet pedes 15,11175, seu pedes 15, dig. 1, & lin. $4\frac{1}{11}$. Hic erit descensus corporum in latitudine graduum 45. Et per tabulam præcedentem in prop. xx. descriptam, descensus erit paulo major in latitudine *Lutetiæ Parisiorum* existente excessu quasi $\frac{3}{5}$ partium lineæ. Gravia igitur per hoc computum in latitudine *Lutetiæ* cadendo in vacuo describent tempore unius secundi pedes *Parisienses* 15, dig. 1, & lin. $4\frac{25}{33}$ circiter. Et si gravitas minuatur auferendo vim centrifugam, quæ oritur à motu diurno terræ in illa latitudine; gravia ibi cadendo describent tempore minuti unius secundi pedes 15, dig. 1, & lin. $1\frac{1}{2}$. Et hac velocitate gravia cadere in latitudine *Lutetiæ* supra ostensum est ad prop. IV, & XIX.

Corol. 8. Distantia mediocris centrorum terræ & lunæ in syzygiis lunæ est sexaginta semidiametrorum maximarum terræ, demptâ tricesimâ parte semidiametri circiter. Et in quadraturis lunæ distantia mediocris eorundem centrorum est $60\frac{5}{6}$ semidiametrorum terræ. Nam hæ duæ distantiæ sunt ad distantiam

DE MUNDI SYSTEMATE.

mediocrem lunæ in octantibus ut 69 & 70 ad $69\frac{1}{2}$ per prop. XXVIII.

Corol. 9. Distantia mediocris centrorum terræ & lunæ in syzygiis lunæ est sexaginta semidiametrorum mediocrium terræ cum decimâ parte semidiametri. Et in quadraturis lunæ distantia mediocris eorundem centrorum est sexaginta & unius semidiametrorum mediocrium terræ, demptâ tricesimâ parte semidiametri.

Corol. 10. In syzygiis lunæ (p) parallaxis ejus horizontalis mediocris in latitudinibus graduum 0, 30, 38, 45, 52, 60, 90, est 57'.20'', 57'.16'', 57'.14'', 57'.12'', 57'.10'', 57'.8'', 57'.4'' respectivè.

In



223. (p) 123. * *Parallaxis* Lunæ horizontalis in diversis latitudinibus seu distantiis ab æquatore determinari potest. Parallaxis Lunæ horizontalis est differentia locorum in quibus Luna in horizonte posita, ex centro & superficie terræ observata inter stellas fixas conspicitur. Hæc autem locorum distantia æqualis est angulo sub quo videretur semidiameter terræ ex loco Lunæ observata. Sit Luna in horizonte constituta in L; observator in superficiei terrestris loco S, Lunam inter stellas referet in b, sed idem observator in centro terræ T positus Lunam referet in a. Est igitur differentia locorum æqualis a L b, qui æquatur angulo S L T, sub quo semidiameter terræ e loco Lunæ L spectatur. Sed quoniam terra est figuræ sphæroidicæ, semidiametri ejus in diversis latitudinibus inter se differunt & est semidiameter maxima secundum æquatorem ad minimam secundum polos, sive in latitudine 90° ut 19658600 ad 19573000 circiter, estque earum differentia 85472 (prop. 19 lib. huj.) in aliis latitudinibus differentia inter diametrum maximam & quamvis aliam est ad differentiam priorem in ratione duplicatâ sinûs totius ad sinum cujusvis latitudinis quamproximè (prop. 20. lib. huj.) hinc in syzigiis Lunæ parallaxis ejus horizontalis mediocris, hoc est, ubi distantia centrorum Lunæ & terræ est semidiametrorum maximarum terræ 59. 366 circiter (cor. 8.) sub æquatore invenitur dicendo, ut est distantia Lunæ à terrâ LS = 59. 366, ad semidiametrum maximam TS = 1, ita sinus totus ad sinum anguli TLS, qui est 57' 20''. In aliis Lunæ locis minuitur parallaxis in eâdem fere ratione ac semi-

In his computationibus attractionem magneticam terræ non consideravi, cujus utique quantitas perparva est & ignoratur. Siquando vero hæc attractio investigari poterit, & mensuræ graduum in meridiano, ac longitudines pendulorum isochronorum in diversis parallelis, legesque motuum maris, & parallaxis lunæ cum diametris apparentibus solis & lunæ ex phænomenis accuratiùs determinatæ fuerint: (q) licebit calculum hunc omnem accuratiùs repetere.

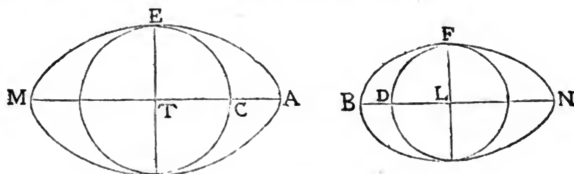
PROPOSITIO XXXVIII. PROBLEMA XIX.

Invenire figuram corporis lunæ.

Si corpus lunare fluidum esset ad instar maris nostri, vis terræ ad fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum esset ad vim lunæ, quâ mare nostrum in partibus & sub lunâ & lunæ oppositis attollitur, (r) ut gravitas acceleratrix lunæ in terram ad gravitatem acceleratricem terræ in lunam, &

semidiametri terræ, & hinc prodeunt parallaxes in latitudinibus graduum o. 30. 38. 45. 52. 60. 90. quales à Newtono determinantur. 123.

(q) * *Licebit calculum hunc omnem accuratiùs repetere.* Theoriæ Newtoni de fluxu & refluxu maris plurima hic potuissemus adjungere quorum ope calculos accuratiùs repetere licuisset. Verùm materiam exhauriunt elegantissimæ dissertationes quas tom. 3. addidimus.



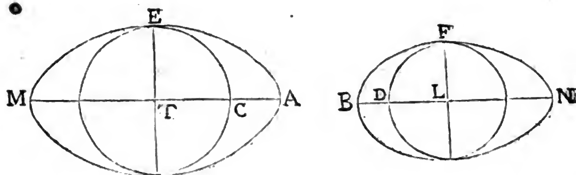
(r) * *Ut gravitas acceleratrix.* Sit T, globus terræ fluido satis profundo EA, coopertus, sitque L, globus Lunæ coopertus fluido FB. Si gravitas acceleratrix Terræ in Lunam æqualis esset gravitati acceleratrici Lunæ in terram, hoc est si æqualis esset materiæ quantitas in Lunâ & in Terrâ, globi duo T, L, sese componerent in figuras sphæroidicas similes quarum axes MA, BN, jacerent in directum

 (106).

DE MUNDI SYSTEMATE.

& diameter lunæ ad diametrum terræ conjunctim; id est, ut 39,788 ad 1 & 100 ad 365 conjunctim, seu 1081 ad 100. Unde cum mare nostrum vi lunæ attollatur ad pedes $8\frac{1}{5}$, fluidum lunare vi terræ attolli deberet ad pedes 93. Eâque de causâ figura lunæ sphærois esset, cujus maxima diameter producta transiret per centrum terræ, & superaret diametros perpendiculares excessu pedum 186. Talem igitur figuram luna affectat, eamque sub initio induere debuit. *Q. E. I.*

Co-



125. (106). Cum enim omnia hinc inde ponantur æqualia præter ipsam molem, nulla est ratio cur figuræ illæ non sint inter se similes, alteraque in acutiorem sphæroidem desinat. Quare in casu præsenti, erit B L ad L F, ut T A ad T E, & vicissim B D ad A C sicut L F ad T E, hoc est, si æqualis esset gravitas acceleratrix terræ in Lunam atque Lunæ in terram, altitudo fluidi Lunaris in partibus proximis & remotissimis suprà globum Lunæ, esset ad altitudinem fluidi terrestris analogam suprà globum terræ ut diameter Lunæ ad diametrum terræ. Rursùs, si terra & Luna æquales habeant diametros, erunt altitudines fluidi suprà globos ut gravitates acceleratrices respective (prop. 74. lib. 1.). Quare si neque gravitas acceleratrix in Lunam æqualis sit gravitati acceleratrici Lunæ in terram, nec diameter Lunæ diametro terræ æqualis, vis terræ ad elevandum fluidum in partibus citimis & ultimis erit ad vim ipsam Lunæ quâ mare nostrum in partibus & sub Lunâ & Lunæ oppositis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in terram ad gravitatem acceleratricem terræ in Lunam & diameter Lunæ ad diametrum terræ conjunctim, sive ut massa Lunæ quæ gravitati acceleratrici est proportionalis ad massam terræ quæ itidem gravitati ejus acceleratrici est proportionalis & ut diameter Lunæ ad diametrum terræ conjunctim. De figurâ corporis Lunæ nova quàm plurima atque eximia habentur in dissertationibus de fluxu & refluxu maris.

Corol. ([f]) Inde vero fit ut eadem semper lunæ facies in terram obvertatur. In alio enim situ corpus lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes, ob parvitatem virium agitantium essent longè tardissimæ: adeò ut facies illa, quæ terram semper respicere deberet, possit alterum orbis lunaris umbilicum (ob rationem in prop. XVII allatam) respicere, neque statim abinde retrahi & in terram converti.

(f) * *Indè verò fit.* Quoniam maxima diameter Lunæ versùs centrum terræ dirigitur (ex dem.) hinc fit ut eadem semper Lunæ facies in terram obvertatur. Positá autem Sphæroidicâ Lunæ figurâ, inter varias Lunæ partes non dabitur æquilibrium, nisi Sphærois Lunæ axem suum telluri obvertat (109); quare in alio situ corpus Lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes, ob parvitatem virium in minimo scilicet axis majoris supià minorem excessu, essent longe tardissimæ adeò ut non turbetur Lunaris motûs circà axem æquabilitas, ideóque (per not. in prop. 17.) facies illa quæ terram semper respicere deberet, possit alterum orbis Lunaris umbilicum respicere, neque statim abinde retrahi & in terram converti.

124. Clariss. D. De Mairan in elegantissimâ dissertatione de motu diurno telluris circa axem quæ legitur in monum. Paris. an. 1729. exponit admodum ingeniosè prout semper facit, cur eadem Lunæ facies in terram continuò obvertatur, variasque explicat inæqualitates librationis Lunaris in longitudinem. Conjecturam facit Vir Doctissimus homogeneam non esse Lunæ materiam sed hemisphærium inferius superiori gravius supponit; quo posito facile demonstrat Lunam respectu telluris in situ constanti manere. Observat deinde fieri non posse ut constans maneat Lunæ positio, nisi constans quoque sit velocitas fluidi in quo Lunam ipsam deferri assumit. Sed in omni orbitâ ellipticâ vel excentricâ qualis est orbita Lunæ, variabiles sunt hujusce fluidi velocitates, quaré Luna in eodem situ consistere non potest, sed oscillationes quasdam in longitudinem patitur, ex quibus fiet ut modo nobis detegatur aliqua pars hemisphærii quod occultum esse solet, modo autem nobis abscondatur aliqua pars hemisphærii quod solet esse conspicuum, idque magis vel minus contingere debet pro majori vel minori inæqualitate velocitatum fluidi. Hâc ratione explicari poterit cur Lunaris librationis quantitas in longitudinem major aliquando ab Astronomis observatur quam ex prop. 17. lib. hujus, prodire debet. Verùm tota hæc explicatio ad rem nostram & Newtonianum systema accommodabitur, si vorticum loco substituatur attractio, quemadmodum à Clariss. Daniele Bernouillio factum est, cujus eximiam Dissertationem de fluxu & refluxu maris cap. 3. consulat Lector. 124.

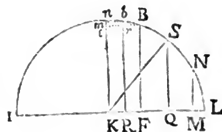
DE MUNDI SYSTEMATE.

LEMMA I.

Si APEPp *terram designet uniformiter densam, centroque* C *& polis* P, p *& æquatore* AE *delineatam; & si centro* C *radio* CP *describi intelligatur sphæra* Papc; *sit autem* QR *planum, cui recta à centro solis ad centrum terræ ducta normaliter insistit; & terræ totius exterioris* PapAPcpE, *quæ sphæra modo descriptâ altior est, particulæ singulæ conentur recedere hinc inde à plano* QR, *sitque conatus particulæ cujusque ut ejusdem distantia à plano: Dico primò, quod tota particularum omnium in æquatoris circulo* AE, *extra globum uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, vis & efficacia ad terram circum centrum ejus rotandam, sit ad totam particularum totidem in æquatoris puncto* A, *quod à plano* QR *maximè distat, consistentium vim & efficaciam, ad terram consimili motu circulari circum centrum ejus movendam, ut unum ad duo. Et motus iste circularis circum axem, in communi sectione æquatoris & plani* QR *jacentem, peragetur.*

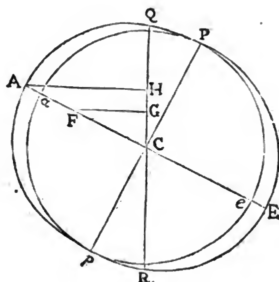
Nam centro *K* diametro *IL* describatur semicirculus *INL*. Dividi intelligatur semicircumferentia *INL* in partes innumeras æquales, & à partibus singulis *N* ad diametrum *IL* demittantur sinus *NM*. Et (t) summa quadratorum ex sinibus omnibus

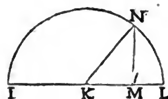
125. (t) 125. * *Et summa quadratorum.* Divisa intelligatur semi-circumferentia INL, in particulas æquales innumeras nb, NL, NS, bB &c. erectisque sinibus bR, NM, &c. erit sinus bm, seu KR, æqualis sinui NM, & ità de cæteris (prop. 26. lib. 3. elem.). Quare sinus omnes ut KR, KF, æquales erunt sinibus ut NM, SQ, ac proinde summa quadratorum ex sinibus omnibus NM, æqualis erit summæ quadratorum ex sinibus omnibus KM. Præterea quadratum semi-diametri KN, æquale est quadratis sinuum KM, MN. Quare (ob summam quadratorum KM,



æqua-

bus *NM* æqualis erit ſummæ quadratorum ex ſinibus *KM*, & ſumma utraque æqualis erit ſummæ quadratorum ex totidem ſemidiametris *KN*; ideoque ſumma quadratorum ex omnibus *NM* erit duplo minor quam ſumma quadratorum ex totidem ſemidiametris *KN*.





Jam dividatur perimeter circuli *AE* in particulas totidem æquales, & ab earum unaquaque *F* ad planum *QR* demittatur perpendiculum *FG*, ut & à puncto *A* perpendiculum *AH*. Et vis, quâ particula *F* recedit à plano *QR*, erit ut perpendiculum illud *FG* per hypotheſin, & hæc vis ducta in diſtantiam *CG* (u) erit efficacia particulæ *F* ad terram circum centrum ejus convertendam. Ideoque efficacia particulæ in loco *F*, erit ad efficaciam particulæ in loco *A*, ut $FG \times GC$ ad $AH \times HC$,

æqualem ſummæ quadratorum N M, ſumma quadratorum ex omnibus ſemidiametris K N, dupla eſt ſummæ quadratorum ex omnibus ſinibus N M, ideòque ſumma quadratorum ex omnibus N M, erit duplo minor quam ſumma quadratorum ex totidem ſemidiametris K N. 125.

(u) * *Erit efficacia.* (47. *lib.* 1.).

DE MUNDI SYSTEMATE. HC, (x) hoc eſt, ut FCq ad ACq; & propterea efficacia tota particularum omnium in locis ſuis F erit ad efficaciam particularum totidem in loco A, ut ſumma omnium FCq ad ſummam totidem ACq, hoc eſt (per (y) jam demonſtrata) ut unum ad duo. *Q. E. D.*

Et quoniam particulæ agunt recedendo perpendiculariter à plano QR, idque æqualiter ab utrâque parte hujus plani: eædem convertent circumferentiam circuli æquatoris, eique inhærentem terram, circum axem tam in plano illo QR quam in plano æquatoris jacentem.

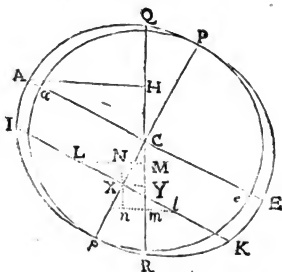
125. (x) * *Hoc eſt*, ob triangula ACH, FCG, ſimilia.

(y) * *Per jam demonſtrata.* (150.)

L E M.

LEMMA II.

Iisdem positis: dico secundò quod vis & efficacia tota particularum omnium extra globum undique sitarum, ad terram circum axem eundem rotandam, sit ad vim totam particularum totidem, in æquatoris circulo AE *uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, ad terram consimili motu circulari movendam, ut duo ad quinque.*



Sit enim IK circulus quilibet minor æquatori AE parallelus, sintque L, l particulæ duæ quævis æquales in hoc circulo extra globum $Pape$ sitæ. Et si in planum QR, (z) quod radio in solem ducto perpendiculare est, demittantur perpendicula LM, lm: vires totæ, quibus particulæ illæ fugiunt planum QR, (a) proportionales erunt perpendiculis illis LM, lm. Sit

(z) * *Quod radio in Solem ducto.* (Per hyp. Lem. 1.).

(a) * *Proportionales erunt.* (Per hypothes. ejusdem Lem.).

De Mundi Systemate.

Sit autem recta Ll plano $Pape$ parellela & bisecetur eadem in X, & per punctum X agatur Nn, quæ parellela sit plano QR & perpendiculis LM, lm occurrat in N ac n, & in planum QR demittatur perpendiculum XY. (b) Et particularum L & l vires contrariæ, ad terram in contrarias partes rotandam, sunt ut $LM \times MC$ & $lm \times mC$, hoc est, ut $LN \times MC + NM \times MC$ & $ln \times mC - nm \times mC$; seu $LN \times MC + NM \times MC$ & (c) $LN \times mC - NM \times mC$: & harum differentia $LN \times Mm - NM \times \overline{MC + mC}$ est vis particularum ambarum simul sumptarum ad terram rotandam. Hujus differentiæ pars affirmativa $LN \times Mm$ seu (d) $2 LN \times NX$ est ad particularum duarum ejusdem magnitudinis in A consistentium vim $2 AH \times HC$, (e) ut LXq ad ACq. Et pars negativa $NM \times \overline{MC + mC}$ seu $2 XY \times CY$ ad particularum earumdem in A consistentium vim $2 AH \times HC$, ut CXq ad ACq. Ac proinde partium differentia, id est, particularum duarum L & l simul sumptarum vis ad terram rotandam est ad vim particularum duarum iisdem æqualium & in loco A consistentium ad terram itidem rotandam, ut $LXq - CXq$ ad ACq. Sed si circuli IK circumferentia IK dividatur in particulas innumeras æquales L, erunt omnes LXq ad totidem IXq ut 1 ad 2 (per lem. 1.) atque ad totidem ACq, ut IXq ad $2 ACq$; & totidem CXq ad totidem ACq ut $2 CXq$ ad $2 ACq$. Quare vires conjunctæ particularum omnium in circuitu circuli IK sunt ad vires conjunctas particularum totidem in loco A, ut $IXq - 2 CXq$ ad $2 ACq$: & propterea (per lem. 1.) ad vires conjunctas particularum totidem in circuitu circuli AE, ut $IXq - 2 CXq$ ad ACq.

Jam

325. (b) * *Et particularum L & l.* (Ex Dem. in Lem. præced.).

(c) * *Et $LN \times mC - NM \times mC$.* Nam ob similitudinem triangulorum $LN : NM = ln : nm$, sed est $NM = nm$; quare $LN = ln$, ideóque $ln \times mC - nm \times mC = LN \times mC - NM \times mC$ & ob $mC = mM + MC$, erit virium illarum differentia $= LN \times Mm - NM \times \overline{MC + mC}$.

(d) * *Seu $2 LN \times NX$.* Nam ob similitudinem triangulorum, est $NX = nX$, ideóque Nn seu $Mm = 2 NX$, ac proinde $LN \times Mm = 2 LN \times NX$.

(e) * *Ut LXq ad ACq.* Est enim $LN : AH = LX : AC$ & $NX : HC = LX : AC$, ideóque per compositionem rationum $LN \times NX : AH \times HC = LXq : ACq$. Simili argumento patet partem nega-

Jam verò si sphæræ diameter Pp dividatur in partes innumeras æquales, quibus insistant circuli totidem IK; (f) materia in perimetro circuli cujusque IK erit ut IXq: ideoque vis materiæ illius ad terram rotandam, erit ut IXq in $IXq - 2CXq$. Et vis materiæ ejusdem, si in circuli AE perimetro consisteret, esset ut IXq in ACq. Et propterea vis particularum omnium materiæ totius, extra globum in perimetris circulorum omnium consistentis, est ad vim particularum totidem in perimetro circuli maximi AE consistentis, ut omnia IXq in $IXq - 2CXq$ ad totidem IXq in ACq, (g) hoc est, ut omnia $ACq - CXq$ in $ACq - 3CXq$ ad totidem $ACq - CXq$ in ACq, id est, ut omnia $ACqq - 4ACq \times CXq + 3CXqq$ ad

negativam esse ad vim particularum earumdem in A consistentium ut C X q ad A C q.

(f) * *Materia in perimetro circuli.* Sunt enim zonæ sphæricæ similes ut quadrata radiorum.

(g) *Hoc est, ut omnia* &c. Nam ex centro C, ad punctum I, ducta intelligatur recta C I, erit $IX^2 = CI^2 - CX^2$, sed est $CI = AC$, quare $IX^2 = AC^2 - CX^2$, ac proinde IXq in $(IXq - 2CXq) = ACq - CXq$ in $ACq - 3CXq$. 125.

ad totidem $ACqq - ACq \times CXq$, hoc est, ut tota quantitas fluens, cujus fluxio est $ACqq - 4\,ACq \times CXq + 3\,CXqq$, ad totam quantitatem fluentem, cujus fluxio est $ACqq - ACq \times CXq$; ac (h) proinde per methodum fluxionum, ut $ACqq \times CX - \frac{4}{3}\,ACq \times CX$ *cub.* $+ \frac{3}{5}\,CXqc$ ad $ACqq \times CX - \frac{1}{3}\,ACq \times CX$ *cub.* id est, si pro CX scribatur tota Cp vel AC, ut $\frac{4}{15}\,ACqc$ ad $\frac{2}{3}\,ACqc$. hoc est, ut duo ad quinque. *Q. E. D.*

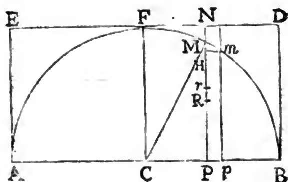
LEM-

225. (h) * *Ac proindè per methodum fluxionum.* Quantitates $ACqq - 4\,ACq \times CXq + 3\,CXqq$ & $ACqq - ACq \times CXq$, concipiantur multiplicatæ per fluxionem rectæ CX, sumptisque fluentibus, erit fluens prioris quantitatis $ACqq \times CX - \frac{4}{3}\,ACq \times CX$ cub. $+ \frac{3}{5}\,CXq$ cub. fluens autem posterioris quantitatis fiet $ACqq \times CX - \frac{1}{3}\,ACq \times CX$ cub. & ut habeatur efficacia tota, pro CX scribatur Cp vel AC, erit fluens prior ad posteriorem ut $\frac{4}{15}\,ACq$. cub. ad $\frac{2}{3}\,ACq$. cub.

(i) LEMMA III.

Iisdem positis: dico tertiò quod motus terræ totius circum axem jam ante descriptum, ex motibus particularum omnium compositus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem in ratione, quæ componitur ex ratione materiæ in terrâ ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuscunque ad duo quadrata ex diametro; id est, in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 ad numerum 1000000.

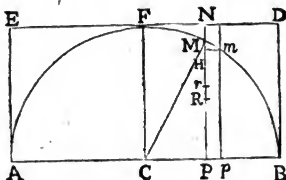
Est enim motus cylindri circum axem suum immotum revolventis ad motum sphæræ inscriptæ & simul revolventis, ut quælibet



(i) 126. * *Lemma* demonstratur. Revolutione semicirculi A F B, & rectanguli eidem circumscripti A E D B, describantur sphæra & cylindrus circumscriptus. Sit radius C B $= 1$, peripheria circuli hoc radio descripti $= n$, abscissa C P $= x$, ordinata P M $= y$, quælibet ipsius pars P R $= v$, R r $= dv$; peripheria circuli radio P R, descripti $= nv$, annulus circularis ex revolutione lineolæ R r $= nvdv$, velocitas puncti R $= v$, motus annuli prædicti $= nv^2dv$, motus totius circuli radio P R, descripti $= \frac{1}{3}nv^3$, motus circuli radio P M, descripti $= \frac{1}{3}ny^3$, motus circuli radi P N descripti $= \frac{1}{3}n$, motus cylindri totius $= \frac{2}{3}n$. 126.

Sit P p $= dx$ motus annuli solidi revolutione figuræ P M m p descripti $= \frac{1}{3}ny^3dx = \frac{1}{3}ndx \times (1-xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}ndx \times (1-xx)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}nx^2dx \times (1-xx)^{\frac{1}{2}}$. Undè motus solidi revolutione figuræ C F M P, descripti $= \frac{1}{4}n \int dx(1-xx)^{\frac{1}{2}}$

libet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis sibi inscriptis: & motus cylindri ad motum annuli tenuissimi, sphæram & cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum



$+\frac{1}{12} n x (1 - xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4} n \times CFMB = \frac{1}{32} nn$, adeóque motus sphæræ totiùs $= \frac{1}{16} nn$. Est igitur motus cylindri ad motum sphæræ ut $\frac{2}{3} n$ ad $16\, nn$, seu ut 16 ad $\frac{3}{2} n$, hoc est, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis sibi inscriptis; nam quadratum diametri 2 est 4 & $4 \times 4 = 16$, circulus verò cujus diameter 2, &
126. peripheria n, est $\frac{1}{2} n$ & tres hujusmodi circuli sunt $\frac{3}{2} n$.

Materia annuli tenuissimi sphæram & cylindrum ad communem eorum contactum F ambientis sit m, & velocitas erit ut CF, sive ut 1, adeóque motus $= m$, & proinde motus cylindri ad motum annuli illius ut $\frac{2}{3} n$ ad m, sive ut $2n$ ad $3m$, hoc est, ut duplum materiæ in cylindro ad triplum materiæ in annulo; basis enim cylindri est circulus $\frac{1}{2} n$ & altitudo diameter AF $= 2$, ideóque cylindrus $= n$. Prædicti annuli materia sit aan, ideóque motus ipsius circà axem cylindri $= aan$. Revolvatur jam idem annulus circà proprium axem quem exhibeat diameter AB; & particula materiæ annuli respondens arcui infinitesimo Mm, erit $a^2 \times$ Mm & hujus motus $a^2 y \times$ Mm $= a^2 dx$, ob proportionem Mm : mH (dx) = CM (1) : PM (y). Quarè motus partis FM, annuli est $a^2 x$, & factâ $x = 1$, motus quadrantis annuli $= a^2$ est motus totius annuli circà proprium axem $= 4a^2$. Est igitur motus annuli circà axem cylindri ad ejusdem motum circà axem proprium ut aan, ad $4aa$, seu ut n ad 4, hoc est, ut circumferentia circuli n, ad duplum diametri 4. Quamobrem motus cylindri est ad motum sphæræ

ut - - - - - 16 ad $\frac{3}{2} n$

motus annuli circà axem cylindri est ad motum cylindri ut m ad $\frac{2}{3} n$

& motus annuli circà axem proprium est ad ejus motum circà axem cylindri ut · 4 ad - n.

Quarè, per compositionem rationum & ex æquo, motus sphæræ circà axem proprium est ad motum annuli ut n^3 ad

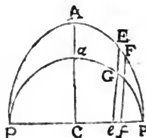
64 m.

plum materiæ in cylindro ad triplum materiæ in annulo; & annuli motus iste circum axem cylindri uniformiter continuatus, ad ejusdem motum uniformem circum diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri.

HY-

$64m$. Est autem n^3 ad $64m$ ut $\frac{2n}{3} \times \frac{3n^2}{16}$ ad $8 \times m$, sed $\frac{2n}{3}$, est quantitas materiæ in terrâ; m, quantitas materiæ in annulo $\frac{3n^2}{16}$ est summa trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli AFB, & 8 est summa duorum quadratorum ex diametro AB. Quare motus terræ totius circum axem jam ante descriptum ex motibus particularum omnium compositus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem, in ratione quæ componitur ex ratione materiæ in terrâ ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuscumque ad duo quadrata ex diametro, id est, in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 ad numerum 1000000, positâ ratione diametri ad peripheriam ut 1 ad 3.141 quamproximè. Q. E. D.

127. Lemma. Semiaxe majori CA & minori CP, describatur semiellipsis PAp, atque radio CP, describatur semicirculus Pap, circà axem Pp revolvi concipiantur tum semicirculus tum semiellipsis, erit sphæra motu semicirculi genita ad sphæroidem semiellipseos revolutione descriptam ut Ca^2 ad CA^2. Sit $pe = x$ $Ge = y$, $Cp = r$, $CA = a$, exprimatque $\frac{r}{p}$ rationem radii ad peripheriam, erit $\frac{py}{r}$, peripheria circuli radio Ge descripti. Præterea (ex naturâ ellipseos 248 lib. 1.) $Ca\ (r) : CA\ (a) = Ge\ (y) : Ee$, ideòque $Ee = \frac{ay}{r}$, hinc peripheria circuli radio Ee descripti $= \frac{pay}{rr}$, ejusdemque circuli area $= \frac{pa^2y^2}{2r^3}$; area autem circuli radio Ge descripti est $\frac{py^2}{2r}$. Quarè fluxio sphæroidis fit $\frac{pa^2y^2dx}{2r^3}$, & fluxio sphæræ est $\frac{py^2dx}{2r}$. Sed (ex naturâ circuli) $y^2 = 2rx - xx$; hinc fluxio sphæroidis est $\frac{2pa^2rxdx - pa^2x^2dx}{2r^3}$; & fluxio sphæræ $\frac{2prxdx - pxxdx}{2r}$, sumptisque fluentibus, erit fluens prima ad alteram ut $\frac{pa^2rx^2}{r^3} - \frac{pa^2x^3}{6r^3}$ ad $\frac{prx^2}{2r} - \frac{px^3}{6r}$. Jam loco x, substituatur $2r$, erit sphærois tota, ad totam sphæram ut $\frac{4pa^2r^3}{r^3} - \frac{8pa^2r^3}{6r^3}$ ad $\frac{2pr^3}{r} - \frac{8pr^3}{6r}$, hoc est, ut a^2, ad r^2, 127.



sive in ratione duplicatâ CA^2 ad Ca^2. Simili argumento patet sphæram ellipseos semiaxe majori tanquam radio descriptam esse ad ellipsoidem in ratione duplicatâ semiaxis majoris ad minorem.

De Mundi Systemate.

HYPOTHESIS II.

Si annulus prædictus terrâ omni reliquâ sublatâ, solus in orbe terræ, motu annuo circa solem ferretur, & interea circa axem suum, ad planum eclipticæ in angulo graduum 23½ inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus punctorum æquinoctialium, sive annulus iste fluidus esset, sive is ex materiâ rigidâ & firmâ constaret.

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XX.

Invenire præcessionem æquinoctiorum.

Motus mediocris horarius nodorum lunæ in orbe circulari, ubi nodi sunt in quadraturis, erat $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$, & hujus dimidium $8''. 17'''. 38^{iv}. 18^{v}$. (ob rationes supra explicatas) est motus medius horarius nodorum in tali orbe; fitque anno toto sidereo $20^{gr}. 11'. 46''$. Quoniam igitur nodi lunæ in tali orbe conficerent annuatim $20^{gr}. 11'. 46''$. in antecedentia; & si plures essent lunæ, motus nodorum cujusque (per corol. 16. prop. LXVI. lib. I.) forent ut tempora periodica; si luna spatio diei siderei juxta superficiem terræ revolveretur, motus annuus nodorum foret ad $20^{gr}. 11'. 46''$ ut dies sidereus horarum 23. 56′ ad tempus periodicum lunæ dierum 27. 7 hor. 43; id est, ut 1436 ad 39343. Et par est ratio nodorum annuli lunarum terram ambientis; sive lunæ illæ se mutuo non contingant, sive liquescant & in annulum continuum formentur, sive denique annulus ille rigescat & inflexibilis reddatur.

Fingamus igitur quod annulus iste, quoad quantitatem materiæ, æqualis sit terræ omni *PapAPepE* quæ globo *Pape* superior est; & quoniam globus iste ad terram illam superiorem (k) ut *aC qu.* ad *AC qu.*−*aC qu.* id est (cum terræ semidiameter minor *PC* vel *aC* sit ad semidiametrum majorem *AC* ut 229 ad 230) ut 52441 ad 459; si annulus iste terram secundùm æquatorem cingeret & uterque simul

127. (k) * Ut *aCqu.* ad *ACqu*−*aCqu.* Globus ille est ad terram totam ut a C^2, ad A C^2 (Lem. præc.) ideoque annulus materiæ inter globum & terram interceptus, hoc est, excessus materiæ in terrâ suprà materiam in globo est ut *ACqu.*−*aCqu.*

mul circa diametrum annuli revolveretur, motus annuli esset ad motum globi interioris (per hujus lem. III.) ut 4590 ad 52441 & 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc est, ut 4590 ad 485223, ideoque motus annuli esset ad summam motuum annuli ac globi, ut 4590 ad 489813. Unde si annulus globo adhæreat, & motum suum, quo ipsius nodi seu puncta æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: (l) motus qui

restabit in annulo erit ad ipsius motum priorem, ut 4590 ad 489813; & propterea motus punctorum æquinoctialium diminuetur in eâdem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum æquinoctialium corporis ex annulo & globo compositi ad motum 20gr. 11'. 46''., ut 1436 ad 39343 & 4590 ad 489813 conjunctim, id est, ut 100 ad 292369. Vires autem quibus nodi lunarum (ut supra explicui) atque (m) ideo quibus puncta æquinoctialia annuli regrediuntur (id est vires 3 *IT in fig. pag.* 411. & 413.) sunt in singulis particulis ut distantiæ particularum à plano *QR*, & his viribus particulæ illæ planum fugiunt; & propterea (per lem. II.) si materia annuli per totam globi superficiem in morem figuræ *Pap APepE* ad superiorem

(l) * *Motus qui restabit in annulo.* (52. lib. 1.)

(m) * *Atquè ideò.* (vid. not. 201. lib. hujus). 127.

illam terræ partem constituendam spargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad terram circa quamvis æquatoris diametrum rotandam, atque ideo ad movenda puncta æquinoctialia, evaderet minor quam prius in ratione 2 ad 5. Ideoque annuus æquinoctiorum regressus jam esset ad $20^{gr}.\ 11'.\ 46''$, ut 10 ad 73092: ac proinde fieret $9''.\ 56'''.\ 50^{iv}$.

Cæterum hic motus (n) ob inclinationem æquatoris ad planum eclipticæ minuendus, idque in ratione sinus 91706 (qui sinus est complementi graduum $23\frac{1}{2}$.) ad radium 100000. Quâ ratione motus iste jam fiet $9''.\ 7'''.\ 20^{iv}$. Hæc est annua præcessio æquinoctiorum à vi solis oriunda.

Vis autem lunæ ad mare movendum erat ad vim solis, ut 4,4815 ad 1 circiter. Et (o) vis lunæ ad æquinoctia movenda est ad vim solis in eâdem proportione. Indeque prodit annua æquinoctiorum præcessio à vi lunæ oriunda $40''.\ 52'''.\ 52^{iv}$, ac tota præcessio annua à vi utrâque oriunda $50''.\ 00'''.\ 12^{iv}$. Et hic motus cum phænomenis congruit. Nam præcessio æquinoctiorum ex observationibus astronomicis est annuatim minutorum secundorum plus minus quinquaginta.

Si (p) altitudo terræ ad æquatorem superet altitudinem ejus ad polos, milliaribus pluribus quam $17\frac{1}{6}$, materia ejus rarior erit ad circumferentiam quam ad centrum: & præcessio æquinoctiorum ob altitudinem illam augeri, ob raritatem diminui debet.

Des-

127. (n) * *Ob inclinationem.* Pro majori vel minori inclinatione plani æquatoris ad planum Eclipticæ minorem esse vel majorem regressum æquinoctiorum patet ex not. 101. lib. hujus. Illud autem decrementum obtinetur, si minuatur motus in ratione sinûs complementi inclinationis ad radium. Sed planum æquatoris inclinatur ad planum Eclipticæ gradibus $23\frac{1}{2}$ circiter, quarè cum motus æquinoctiorum sit tardissimus, satis accurate minuitur motus ille in ratione sinûs 91706. qui sinus est complementi graduum $23\frac{1}{2}$ ad radium 100000.

(o) * *Et vis Lunæ.* (Cor. 18. 19. Lib. I.).

(p) * *Si altitudo terræ.* Quò enim altior erit materia ad æquatorem eò levior sit oportet ut materiam quæ est versus polos in æquilibrio possit sustinere. Cæterum quia in tribus non satis Laudandis Dissertationibus tom. 3. adjunctis, nova occurrunt quamplurima de figurâ telluris, de viribus Solis & Lunæ, præcessionem æquinoctiorum, eádem qua hactenus factum est, methodo, accuratiùs licebit computare.

Descripsimus jam systema solis, terræ, lunæ, & planetarum: superest ut de cometis nonnulla adjiciantur.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIX. PROBL. XX.

LEMMA IV.

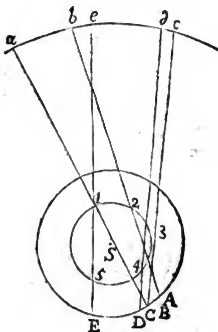
Cometas esse lunâ superiores & in regione planetarum versari.

(q) Ut defectus parallaxeos diurnæ extulit cometas supra regiones sublunares, sic (r) ex parallaxi annuâ convincitur eorum descensus in regiones planetarum. Nam cometæ, qui progrediuntur secundum ordinem signorum, sunt omnes sub exitu apparitionis aut solito tardiores aut retrogradi, si terra est inter ipsos & solem; at justo celeriores si terra vergit ad oppositionem. Et contra, qui pergunt contra ordinem signorum sunt justo celeriores in fine apparitionis, si terra versatur inter ipsos & solem; & justo tardiores vel retrogradi, si terra sita est ad contrarias partes. (s) Contingit hoc maximè ex motu terræ

(q) * *Ut defectus parallaxeos diurnæ.* Parallaxis diurna cometæ est differentia locorum in quibus cometa ex centro terræ, vel ex eo superficiei terræ loco ad quem cometa verticalis est & ex quovis alio loco superficiei terræ observatus, inter stellas fixas refertur. Hæc parallaxis diurna, maxima est in Lunâ, ubi ea in horizonte constituitur, inde verò magis magisque decrescit quò altius Luna suprà horizontem elevatur. Quia verò hæc parallaxis non observatur in cometis, patet eos esse Lunâ superiores (30.).

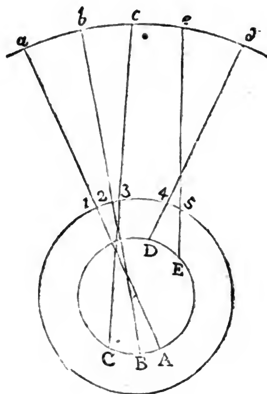
(r) * *Sic ex parrallaxi annuâ.* Parallaxis annua ex motu circà solem oritur, hæcque respicit longitudinem cometæ, hoc est, distantiam ejus in Eccliptica à primo arietis puncto. Quomodò ex hâc parallaxi Newtonus colligat cometas descendere in regiones planetarum explicabitur in decursu.

(s) 128. * *Contingit hoc maximè.* Sit S, Sol A B E, orbita telluris & a b c, sphæra fixarum ad quam Planetæ referantur, exhibeatque 1, 2, 3, 4, Planetæ alicujus inferioris orbitam. Moveatur terra ex A, per B, in C, & intereà Planeta ex 1, per 2, in 3, hic Planeta ex a, per b, in c, secundum ordinem signorum progredi videbitur. At si terra moveatur ex C, per D, in E & planeta ex 3, per 4 in 5, idem planeta per d, in e, retrogredi videbitur. 128.



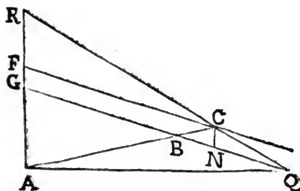
DE MUNDI SYSTEMATE.

in vario ipsius situ, perinde ut fit in planetis, qui pro motu terræ vel conspirante vel contrario nunc retrogradi sunt, nunc tardiùs progredi videntur, nunc verò celeriùs. Si terra pergit ad eandem partem cum cometa, & motu angulari circa solem tantò celeriùs fertur, ut recta per terram & cometam perpetuo ducta



228. *Jam verò repræsentet 1, 2, 3 orbem planetæ superioris, sitque A B C, orbis terræ. Moveatur terra ex A, per B, & C in D, planeta autem superior ex 1 per 2 & 3 in 4, hic planeta secundum ordinem signorum progredi videbitur. At si terra moveatur ex D in E, planeta verò ex 4 in 5, idem planeta ex loco d in e, retrogredi apparebit. Quia verò planetæ modò in consequentia, modò in antecedentia ferri videntur, necessum est ut modò tardiores, modò celeriores appareant, atque in ipso veluti motuum æquilibrio, neque in consequentia neque in antecedentia sensibiliter pergant, sed quasi stationarii videantur. Hæc itaque planetarum phænomena ex motu terræ maximè contingunt, oriri tamen possunt etiam aliquantulum ex inæquali planetarum motu.*

ducta convergat ad partes ultra cometam, cometa è terrâ spectatus ob motum suum tardiorem apparet esse retrogradus; sin terra tardius fertur, motus cometæ (detracto motu terræ) fit saltem tardior. At si terra pergit in contrarias partes, cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione



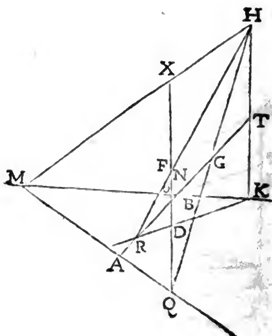
129. Lemma. Datis positione tribus rectis Q A, Q B, Q C, ex eodem puncto Q, ductis & in eodem plano jacentibus, ducere rectam AC, ex puncto quolibet A, ità ut partes A B, C B, sint in datâ ratione m, ad n.

Ex A ducatur utcumque recta A R, rectis Q C, Q B, productis occurrens in G, R, capiantur que G F, A G, in datâ ratione m ad n (prop. 12. lib. 6. elem.). Per F, agatur F C parallela rectæ G Q, ipsique Q R occurrens in C, erit juncta A C, recta quæsita. Nam ob parallelas F C, GQ, est A B: BC = A G : G F, sed (per constr.) G F, A G, sunt in datâ ratione m ad n. Quarè eandem inter se rationem habent partes interceptæ A B, B C.

Idem fit trigonometricè. Nam in triangulo A Q G, datur latus A G, & præterea noti sunt anguli A Q G, Q A G, ideóque dabitur A G, ac proinde innotescit etiam G F, datam habens rationem ad A G (per constr.) quare dabitur recta C N, æqualis & parallela rectæ G F. Rursus in triangulo Q N C, cognitis angulo C Q N, & angulo C N Q, qui æqualis est angulo F G N, hoc est, anguli prius inventi AGQ, complemento ad duos rectos, atque insuper dato latere C N, innotescet C Q, tandem in triangulo A C Q, datis lateribus Q A, Q C, & angulo intercepto A Q C, invenientur latus C A atque anguli Q A C, Q C A, id est, magnitudo & positio rectæ A C. 129.

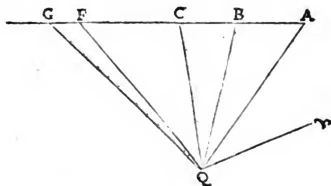
De Mundi Systemate.

tione vel motu retrogrado distantia cometæ in hunc modum colligitur. Sunto ♈ QA, ♈ QB, ♈ QC observatæ tres longitudines cometæ sub initio motus, sitque ♈ QF longitudo ultimò obser-



130. 130. Lemma. Datis positione quatuor rectis Q A, Q B, K B, R D, in eodem plano jacentibus ducere rectam M K, ità ut M O, sit ad O N ut m ad n, & O N ad N K ut n ad r. Capiatur B G, ad B A, sicut $n+r$ ad m. Item capiatur F B ad B D ut $m+n$ ad r. Junctæ rectæ Q G, R F, producantur donec concurrant. Per punctum concursus H, ducatur H K parallela rectæ B D, itemque H M, parallela rectæ R B, erit M K recta quæsita. Nam propter parallelas H M, T N (per constr.) erit K N ad N M, ut K T ad T H. Sed quia H K parallela est rectæ F D, K T est ad T H ut D B ad B F, hoc est, (per constr.) ut r ad $m+n$, ac proinde K N est ad N M ut r ad $m+n$. Rursus ob parallelas H K, O X, erit M O ad O K ut M X ad X H, sed quia H M, parallela est rectæ A G, erit M X ad X H ut A B ad B G, id est, (per constr.) ut m ad $n+r$. Est igitur M O ad O K ut r ad $m+n$. Quare, dividendo & ex æquo, tres rectæ M O, O N, N K, sunt in eâdem ratione cum tribus quantitatibus m, n, r. Idem fit trigonometricè. Nam rectarum quatuor datarum Q A, Q B, R B, R D, dantur intersectiones omnes ac proinde rectæ Q B, D B, R B, B A, R D, sunt magnitudine datæ. Præterea dantur etiam B F & B G, utpotè habentes datam rationem ad B D & R A. Jam verò in triangulo R B F, datis lateribus B R, B F, cum angulo intercepto R B F, dantur latus R F & angulus R F B ac proindè etiam datur angulus Q F H. Simi-

obſervata, ubi cometa videri deſinit. ([a]) Agatur recta *ABC*, cujus partes *AB*, *BC* rectis *QA* & *QB*, *QB* & *QC* interjectæ, ſint ad invicem ut tempora inter obſervationes tres primas. Producatur *AC* ad *G*, ut ſit *AG* ad *AB* ut tempus inter obſervationem primam & ultimam ad tempus inter obſervationem primam & ſecundam, & jungatur *QG*. Et ſi cometa moveretur uniformiter in lineâ rectâ, atque terra vel quieſceret,



ceret, vel etiam in lineâ rectâ uniformi cum motu progrederetur; foret angulus ♈*QG* longitudo cometæ tempore obſervationis ultimæ. Angulus igitur *FQG*, qui longitudinum differentia eſt, oritur ab inæqualitate motuum cometæ ac terræ. Hic autem angulus, ſi terra & cometa in contrarias partes moventur, additur angulo ♈*QG*, & ſic motum apparentem cometæ

Similiter in triangulo QBG, datis lateribus QB, BG, & angulo QBG, dabitur angulus BQG; quare in triangulo QFH, datis duobus angulis QFH, FQH, cum latere QF, quod eſt ſumma vel differentia rectarum datarum QB, QF innoteſcet latus QH. Tandem in triangulo QHM, dato angulo HQM qui eſt ſumma vel differentia notorum angulorum BQA, HQB, datoque angulo QMH qui æqualis eſt angulo dato QAB, ſimulque noto latere QH, innoteſcent latera HM, QM. Simili prorſus modo invenientur latera RK, HK, 130.
in triangulo RKH. Igitur in triangulo MHK, notis lateribus HM, HK, & angulo intercepto MHK, qui æqualis eſt angulo dato ABQ, innoteſcent anguli HMK, HKM & baſis MK. Datis autem angulis HMQ, HMK, dabitur horum ſumma vel differentia QMK, hoc eſt, poſitio rectæ MK, ob rectam QM, poſitione datam. Simili modo rectæ QO, RN, RK & anguli quos MK cum his rectis efficit, trigonometrice inveniuntur.

(a) * *Agatur recta ABC.* (129).

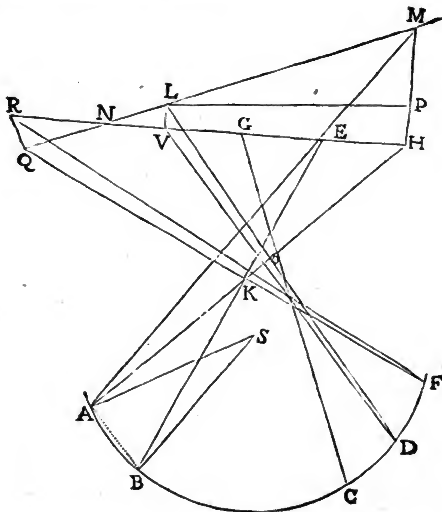
De Mundi Systemate.

metæ velociorem reddit: ſin cometa pergit in eaſdem partes cum terrâ, eidem ſubducitur, motumque cometæ vel tardiorem reddit, vel forte retrogradum; uti (b) modo expoſui. Oritur igitur hic angulus præcipuè ex motu terræ, & idcirco pro parallaxi cometæ meritò habendus eſt, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod à cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri poſſit. Diſtantia vero cometæ ex hâc parallaxi ſic colligitur. Deſignet *S* ſolem, *a c T* orbem magnum, *a* locum terræ in obſervatione primâ, *c* locum terræ in obſervatione tertiâ, *T* locum terræ in obſervatione ultimâ, & T♈ lineam rectam verſus principium arietis ductam. Sumatur angulus ♈*TV* æqualis angulo ♈*QF*, hoc eſt, æqualis longitudini cometæ ubi terra verſatur in *T*. Jungatur *a c*, & producatur ea ad *g*, ut ſit *a g* ad *a c* ut *AG* ad *AC*, & erit *g* locus quem terra tempore obſervationis ultimæ, motu in rectâ *a c* uniformiter continuato, attingeret. Ideoque ſi ducatur *g*♈ ipſi *T*♈ parallela, & capiatur angulus ♈*gV* angulo ♈*QG*

130. (b) * *Ubi modò expoſui.* (128).

♈ *QG* æqualis, erit hic angulus ♈ *gV* æqualis longitudini cometæ è loco *g* ſpectati; & angulus *TVg* parallaxis erit, quæ oritur à tranſlatione terræ de loco *g* in locum *T*: ac proinde *V* locus erit cometæ in plano eclipticæ. Hic (c) autem locus *V* orbe *Jovis* inferior eſſe ſolet.

Idem



(c) 131. * *Hic autem locus V.* Recta H V, referat veſtigium cometæ in plano Eccliptica, ſintque V, G, E, H, quatuor cometæ loca in plano Eccliptica præcedenti methodo inventa. Sit S, ſol, A B C D, orbis magnus, ſintque A, B, C, D, quatuor terræ loca ad tempora obſervationum nota. In triangulo A S B, dantur latera S A, S B, daturque angulus A S B, differentia ſcilicet locorum terræ e ſole viſorum; quare dabuntur anguli S A B, S B A, notaque erit in partibus ſemidiametri orbis magni recta A B, chorda nempè arcûs à tellure interim percurſi. Rurſus in triangulo K A B, dantur omnes anguli, nam datur angulus K A B, qui eſt ſum- 131.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Idem colligitur ex curvaturâ viæ cometarum. (d) Pergunt hæc

132. summa vel differentia notorum angulorum S B A, S B K. Quare datur ratio laterum A K, A B, sed data est ratio rectarum S A, A B, dabitur itaque ratio S A ad K A. At (131.) nota est ratio inter K O & K H, innotescet igitur ratio inter S A & K H; Quarè datur A H, distantia cometæ à terrâ in partibus semidiametri orbis magni. Simili planè modo invenientur aliorum locorum distantiæ à terrâ E, G, V, hic autem locus V, ubi cometa videri desinit, ex datis observationibus inito computo per methodum expositam, orbe Jovis inferior esse solet.

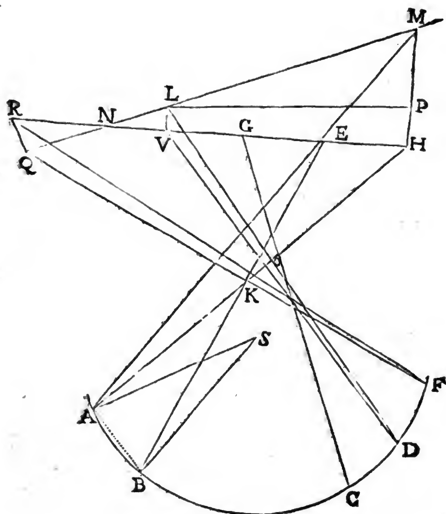
132. Cometæ vestigium in plano Eclipticæ jam determinavimus, ut autem veram obtineamus cometæ trajectoriam, ex loco H, ad planum Eccliptïcæ erecta intelligatur normalis H M, tangens anguli latitudinis cometæ ad datum observationis tempus posito A H, radio, eritque M, locus verus cometæ ad tempus datum; Est enim positio rectæ A H, ejus longitudo & angulus M A H, latitudo. Similiter in loco V, ad idem Eccliptïcæ planum erigatur normalis V L, æqualis tangenti latitudinis ad idem tempus observatæ, sumpto D V, pro radio, erit L, locus verus cometæ, ideóque juncta recta L M, est ipsa trajectoria quæsita. Patet autem distantiam loci M, ab A, sive rectam A M, esse ad rectam A H, ut secans latitudinis in H, ad radium, & ità porrò de aliis cometæ locis.

133. Cætera quæ ad motum cometæ pertinent facilè definientur. Invenitur L M, recta scilicet percursa à cometa, dum tellus ab A ad D movetur. Ducatur enim L P ipsi V H parallela cum rectâ M E concurrens in P. In triangulo P L M, præter angulum rectum in P, datur latus L P, æquale lateri V H, atque etiam datur latus P M, æquale differentiæ rectarum datarum M H, L V, quarè dabitur L M. Producatur M L, donec cum H V, concurrat in N, erit N nodus. Præterea N V erit ad V L, ut V H ad P M, itemque L N ad L V ut L M ad M P, & ideò dabuntur L N, L V, capiatur tempus quod sit ad tempus inter observationem in M, & observationem in L, ut N L ad L M, habebitur tempus inter observationem in L, & appulsum cometæ ad nodum, cum enim cometa in lineâ rectâ uniformiter moveri supponatur, tempora sunt ut spatia. Dabitur quoque locus cometæ in nodo versantis, cum enim detur punctum N, & propter tempus cognitum inter observationem in L, & appulsum cometæ ad nodum, detur quoque locus terræ pro hoc momento, dabitur positio rectæ hæc puncta jungentis, hoc est longitudo cometæ in nodo existentis. Tandem ob datam distantiam nodi à loco V datamque latitudinem cometæ in eodem loco, dantur in triangulo sphærico rectangulo latera duo circà angulum rectum ac proinde innotescit inclinatio hypothenusæ, id est, semitæ ipsius cometæ ad Eccliptïcam.

134. Ex dictis colligitur quâ ratione ad tempus quodlibet propositum definiri possint locus cometæ è terrâ visus, illiusque distantia à terrâ. Determinentur ut suprà vestigium orbitæ in plano Eccliptïcæ H E V R, ipsaque vera cometæ orbita M L N Q. Capiatur H R ad H V, ut spatium inter observationem primam tempusque datum ad spatium inter observationem primam & quartam. Dato terræ loco ad tempus propositum, putà F, datur positio rectæ F R, ac proinde datur longitudo cometæ quæsita (132). Præterea fiat R Q ad R N, sicut M H ad H N, patet dari latitudinem cometæ ad tempus datum (loc. cit.). His autem datis, obtineri potest distantia cometæ à terrâ (ibid.) in hâc ergò hypothesi quod cometæ in lineis rectis uniformiter moveantur, determinari possunt præcipua motûs cometarum elementa. Hâc de re consulat Lector opusculum Clariss. Viri Dominici Cassini de cometâ an. 1664., Davidis Gregorii Astronomiam Physicam & Cassini filii Theoriam cometarum in monumentis Paris. an. 1727.

(d) * *Pergunt hæc corpora.* Est & alia parallaxis proveniens ex motu terræ circà Solem. Hæc latitudinem cometarum respicit, hoc est, distantiam eorum ab Eccliptïcâ versus Boream aut austrum, undè fit ut cometæ in sphærâ fixarum à cursu cir-

hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine cursus, ubi motus apparentis pars illa, quæ à parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum



circulari deflectere & lineam admodum irregularem videantur describere. Cum enim planum in quo cometa movetur, cum plano Eclipticæ in quo terra fertur, non coincidat, cometa modò suprà Eclipticam in Septentrionem ascendit, modò infrà Eclipticam in austrum descendit. Quia tamen in eodem plano semper incedit, orbem circularem, tellure quiescente, videretur describere, sed quoniam tellus ipsa movetur in plano Eclipticæ, cometa pro diversis terræ locis observatus, modò versùs Boream altius ascendere, modò versùs austrum inferius descendere apparebit. Observationibus compertum est cometas propemodum in 134

DE MUNDI SYSTEMATE.

totum apparentem, deflectere solent ab his circulis, & quoties terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maximè ex parallaxi, propterea quod respondet motui terræ; & insignis ejus quantitas, meo computo, collocavit disparentes cometas satis longe infra jovem. Unde consequens est quod in perigæis & periheliis, ubi propius adsunt, descendunt sæpius infra orbes Martis & inferiorum planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas cometarum (e) ex luce capitum. Nam corporis cœlestis à sole illustrati & in regiones longinquas abeuntis, diminuitur splendor in quadruplicatâ ratione distantiæ: in duplicatâ ratione videlicet ob auctam corporis distantiam à sole, & in aliâ duplicatâ ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde si detur & lucis quantitas & apparens diameter cometæ, dabitur distantia, dicendo quod distantia sit ad distantiam planetæ, in ratione diametri ad diametrum directè & ratione duplicatâ lucis ad lucem inversè. Sic minima capillitii cometæ anni 1682 diameter, per tubum opticum

135. circulis maximis pergere, quandiu moventur celerius, at in fine cursûs deflectere solent ab his circulis, hæc autem deflexio pendet ex ipsâ trajectoriæ cometarum curvaturâ de quâ infra. Quarè deinceps trademus normam computi quo Newtonus disparentes cometas satis longè infrà Jovem collocavit, nonnullaque afferemus exempla cometarum qui infrà orbes Martis & inferiorum planetarum descenderunt.

(e) 135. (*) *Ex Luce capitum.* Intelligantur duæ superficies sphæricæ concentricæ, minor una, major altera, & in centro utriusque constitutum fingatur corpus aliquod lucidum. Quoniam corpus illud radios suos per omnem circuitum diffundit, evidens est eandem radiorum quantitatem in concavâ superficie utriusque sphæræ contineri, ideóque densitates radiorum erunt in ratione superficierum sphæricarum inversè, hoc est, in ratione duplicatâ semidiametrorum sive distantiarum à corpore lucido inversè (14. lib. 1.). Quare nullâ distantiarum habitâ ratione, sensatio quæ à radiis nervos opticos percutientibus excitatur, est ut quadratum distantiæ inversè. Sed quò remotius est lucidum, eo pauciores radii ad oculum perveniunt, idque in duplicatâ ratione distantiarum (loco suprà cit.) hoc est, in duplicatâ ratione diametri apparentis diminutæ. Quare, componendo, corporis cœlestis à sole illustrati & in regiones longinquas abeuntis diminuitur splendor in ratione quadruplicatâ distantiæ. Erit itaque quadratum distantiæ cometæ à sole ad quadratum distantiæ planetæ ab eodem in ratione compositâ ex duplicatâ ratione diametri apparentis cometæ ad diametrum apparentem planetæ & ratione lucis planetæ ad lucem cometæ. Unde distantia cometæ à Sole est ad distantiam planetæ ab eodem in ratione compositâ ex ratione diametri apparentis cometæ ad diametrum apparentem planetæ & ratione subduplicatâ Lucis planetæ ad Lucem cometæ.

cum sexdecim pedum à *Flamstedio* observata & micrometro mensurata, æquabat 2′. 0″; nucleus autem seu stella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, ideoque lata erat tantum 11″ vel 12″. Luce vero & claritate capitis superabat caput cometæ anni 1680, stellasque primæ vel secundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus saturnum cum annulo suo quasi quadruplo lucidiorem fuisse: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi sit quasi 21″, ideoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter esset 30″: erit distantia cometæ ad distantiam saturni ut 1 ad $\sqrt{4}$ inversè, & 12″ ad 30″ directè, id est, ut 24 ad 30 seu 4 ad 5. Rursus cometa anni 1665 mense aprili, ut auctor est *Hevelius*, claritate suâ pene fixas omnes superabat, quinetiam ipsum saturnum ratione coloris videlicet longè vividioris. Quippe lucidior erat hic cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, & cum stellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quasi 6′, at nucleus cum planetis ope tubi optici collatus plane minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipsi æqualis judicabatur. Porrò cum diameter capillitii cometarum raro superet 8′ vel 12′, diameter verò nuclei, seu stellæ centralis sit quasi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet stellas hasce ut plurimùm ejusdem esse apparentis magnitudinis cum planetis. Unde cum lux earum cum luce Saturni non rarò conferri possit, eamque aliquando superet; manifestum est, quod cometæ omnes in periheliis vel infrà Saturnum collocandi sint, vel non longè suprà. Errant igitur toto cœlo, qui cometas in regionem fixarum prope ablegant: quâ certe ratione non magis illustrari deberent à Sole nostro, quam planetæ, qui hic sunt, illustrantur à stellis fixis.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIX. PROB. XX.

Hæc disputavimus non considerando obscurationem cometarum per fumum illum maximè copiosum & crassum, quó caput circundatur, quasi per nubem obtuse semper lucens. Nam quanto obscurius redditur corpus per hunc fumum, tantò pro-

De Mundi Systemate.

pius ad Solem accedat necesse est, ut copia lucis à se reflexæ planetas æmuletur. Inde verisimile fit cometas longè infra sphæram Saturni descendere, uti ex parallaxi probavimus. Idem verò quam maximè confirmatur ex caudis. (f) Hæ vel ex reflexione fumi sparsi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore casu minuenda est distantia cometarum, ne fumus à capite semper ortus per spatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expansione propagetur. In posteriore referenda est lux omnis tam caudæ quam capillitii ad nucleum capitis. Igitur si concipiamus lucem hanc omnem congregari & intra discum nuclei coarctari, nucleus ille jam certe, quoties caudam maximam & fulgentissimam emittit, (g) Jovem ipsum splendore suo multùm superabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multò magis illustrabitur à sole, ideoque erit soli multò propior. Quinetiam capita sub Sole delitescentia, & caudas cum maximas tum fulgentissimas instar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem veneris collocari debent. Nam lux illa omnis si in stellam congregari supponatur, ipsam venerem ne dicam veneres plures conjunctas quandoque superaret.

Idem

135. (f) * *Hæ vel ex reflexione fumi sparsi*, ut posteà probabitur.

(g) * *Jovem ipsum splendore suo.* Id variis observationibus confirmat Newtonus in opusculo de mundi systemate. Cometa anni 1679. Decembris 12. & 15. stilo veteri, quo tempore caudam clarissimam emittebat & Luci multorum Jovium per tantum spatium diffusæ ac dilatatæ non imparem, magnitudine nuclei, ut observabat *Flamstedius*, cedebat Jovi, adeóque Soli longe vicinior, quin imò minor erat Mercurio. Nam die 17ª. mensis hujus, ubi terræ propior erat, apparuit Cassino per telescopium Ped. 35. paulò minor globo Saturni. Die 8ª. mensis hujus, tempore matutino, vidit Halleius caudam perbrevem & latam & quasi ex corpore solis jamjam orituri exeuntem, ad instar nubis insolito more fulgentis, nec priùs disparentem quam sol ipse inciperet suprà horizontem conspici. Superabat igitur hic splendor Lucem nubium usque ad ortum solis, & immediato solis splendori solum cedendo vincebat longe lucem omnium stellarum conjunctim. Non Mercurius, non Venus, non ipsa Luna in tantâ solis orientis vicinitate cerni solet. Fingamus lucem hancce dilatatam coarctari & in orbem nuclei cometici Mercurio minorem coarctari & splendore longe fortiori jam reddita magis conspicua, Mercurium longe superabit, adeóque erit soli vicinior. Diebus 12. & 15. ejusdem mensis, cauda hæc per spatium longe majus diffusa apparuit rarior, & luce tamen adeò forti ut stellis fixis vixdum apparentibus cerneretur & mox trabis mirum in modum fulgentis speciem exhibuit.

Idem denique colligitur ex luce capitum crescente in recessu cometarum à terrâ solem versùs, ac decrescente in eorum recessu à sole versus terram. Sic enim cometa posterior anni 1665. (observante *Hevelio*) ex quo conspici cœpit, remittebat semper de motu suo apparente, ideoque præterierat perigæum; splendor vero capitis nihilominus indies crescebat, usque dum cometa radiis solaribus obtectus desiit apparere. Cometa anni 1683 (observante eodem *Hevelio*) in fine mensis Julii, ubi primum conspectus est, tardissime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter singulis diebus in orbe suo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuò augebatur usque ad *Sept.* 4. quando evasit graduum quasi quinque. Igitur toto hoc tempore cometa ad terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis micrometro mensurata colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug.* 6. esse tantum 6'. 5'' inclusa coma, at *Sept* 2. esse 9'. 7''. Caput igitur initio longe minus apparuit quam in fine motus, at initio tamen in viciniâ solis longe lucidius extitit quam circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob recessum ipsius à sole, quoad lumen decrevit, non obstante accessu ad terram. Cometa anni 1618. circa medium mensis *Decembris*, & iste anni 1680. circa finem ejusdem mensis, celerrimè movebantur, ideoque tunc erant in perigæis. Verum splendor maximus capitum contigit ante duas fere septimanas, ubi modo exierant de radiis solaribus; & splendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate solis. Caput cometæ prioris, juxta observationes *Cysati*, *Decemb.* 1. majus videbatur stellis primæ magnitudinis, & *Decemb.* 16. (jam in perigæo existens) magnitudine parum, splendore seu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan.* 7. *Keplerus* de capite incertus finem fecit observandi. Die 12 mensis *Decemb.* conspectum & à *Flamstedio* observatum est caput cometæ posterioris in distantia novem graduum à sole; id quod stellæ tertiæ magnitudinis vix concessum fuisset. *Decemb.* 15 & 17 apparuit idem ut stella tertiæ magnitudinis, diminutum utique splendore nubium juxta solem occidentem. *Decemb.* 26. velocissimè motus

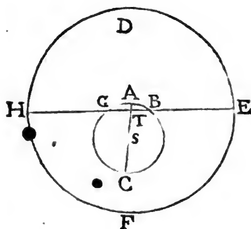
motus, inque perigæo propemodum existens, cedebat ori pegasi, stellæ tertiæ magnitudinis. *Jan.* 3. apparebat ut stella quartæ, *Jan.* 9. ut stella quintæ, *Jan.* 13. ob splendorem lunæ crescentis disparuit. *Jan.* 25. vix æquabat stellas magnitudinis septimæ. Si sumantur æqualia à perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus posita, ob æquales à terrâ distantias, æqualiter lucere debuissent, in plaga solis maximè splenduêre, ex altera perigæi parte evanuêre. Igitur ex magnâ lucis in utroque situ differentia, concluditur magna solis & cometæ vicinitas in situ priore. Nam lux cometarum regularis esse solet, & maxima apparere ubi capita velocissimè moventur, atque ideo sunt in perigæis; nisi quâtenus ea major est in vicinia solis.

Corol. 1. Splendent igitur cometæ (h) luce solis à se reflexâ.

Corol. 2. (i) Ex dictis etiam intelligitur cur cometæ tantopere frequentant regionem solis. Si cernerentur in regionibus longè

135. (h) * *Luce Solis à se reflexâ.* Nam à terrâ recedentibus cometis & ad solem accedentibus, augetur eorum splendor, decrescente licet diametro, ut ex præcedentibus observationibus patet.

(i) * *Ex dictis etiam intelligitur.* Referat S solem, T, terram, circulus DEFH, sphæram fixarum. Quoniam cometæ splendent luce solis à se reflexâ, (cor. 1.), ii non videbuntur, nisi à sole ità illustrentur ut oculi nostri hâc luce moveri possint. Prætereà cometæ per caudas suas maximè fiunt conspicui, has autem caudas non emittunt priusquam ad solem aliquantulum incaluerint, quare patet cometas sese conspicuos non præbere nisi ad definitam quandam à sole distantiam accedant. Ponatur itaque sphæra ABCG, soli concentrica ad talem distantiam descripta ut nullus cometa propter illustrationis defectum, detegi possit, priusquam ad sphæræ hujus superficiem pervenerit, juncta recta ST, producatur utrinque donec superficiei huic occurrat in A, & C. Per T, ductum intelligatur planum HE, cui normalis est recta AC, planum illud sphæram dividet in duo hemispheria quorum unum HFE, est versus solem, alterum verò HDE, soli opponitur. Cometæ omnes in sphæ-



ræ segmento BCG, existentes, videbuntur in hemisphærio versus solem, omnes autem qui versantur in segmento BAG videbuntur in hemisphærio quod soli opponitur.

longè ultra saturnum, deberent sæpiùs apparere in partibus soli oppositis Forent enim terræ viciniores, qui in his partibus versarentur; & sol interpositus obscuraret cæteros. Verum percurrendo historias cometarum, reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti sunt in hemisphærio solem versus, quam in hemisphærio opposito, præter alios proculdubio non paucos, quos lux solaris obtexit. Nimirum in descensu ad regiones nostras neque caudas emittunt, neque adeo illustrantur à sole, ut nudis oculis se prius detegendos exhibeant, quam sint ipso jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa solem descripti pars longè major sita est à latere terræ, quod solem respicit; inque parte illâ majore cometæ, soli ut plurimum viciniores, magis illuminari solent.

Corol. 3. Hinc (k) etiam manifestum est, quod cœli resistentia destituuntur. Nam cometæ vias obliquas & nonnunquam cursui

tur. Quarè si segmentum BCG, majus sit segmento BAG, plures cometæ videbimur in hemisphERIO versus solem quam in opposito. Jam verò cometæ nudis oculis se priùs detegendos non exhibent quam sint Jove propiores; ponatur itaque SA, circiter $\frac{1}{2}$ distantiæ Martis à sole, hoc est, SA sit circiter dupla ipsius ST, erit segmentum BGC plusquam quadruplo majus segmento BAG, ideóque quadruplo vel quintuplo plures cometæ detegentur in hemispherio versus solem quam in hemispherio opposito. At si cometæ cernerentur in regionibus longè ultrà Saturnum, foret SA, longè major quam ST, & ideò cometæ sæpiùs deberent apparere in partibus soli oppositis, forent enim terræ viciniores qui in segmento BAG, versantur, cæteros verò in segmento BCG, sol interpositus obscuraret. Ex his intelligitur cur cometæ tantoperè frequentant regionem Solis.

(k) * *Hinc etiam manifestum est.* Clariss. Cassinus in mon. Paris. an. 1731. retrogrados cometarum motus ad directos ingeniosè reduxit. Observatos plurimorum cometarum motus retrogrados meras esse apparentias conjectatur, non secus ac directus planetarum circumsolarium motus, apparet aliquandò retrogradus. Sed quamvis celeberrimi hujusce Astronomi judicium maximè veneremur, nonnullos tamen cometas motu verè retrogrado contrà seriem signorum cursum tenuisse conabimur ostendere, ubi hâc de re plura dicendi locus dabitur, postquam scilicet tradiderimus motuum cometarum elementa Obliquas esse nonnunquam cometarum vias & cursui planetarum contrarias fateri non dubitarunt quidam Cartesiani. Verùm quâ ratione diversi illi cometarum motus cum vorticibus conciliari possint difficilè intelligitur, cum enim cometæ in regiones planetarum descendant, necesse videtur ut rapidissimo vorticum torrente contrarii cometarum motus maximè perturbentur, citóque destruantur, ac tandem cometæ hujusce torrentis vi rapiantur. At summè regulares esse cometarum motus & contrâ cursum planetarum distinctissimè conservari, nonnullis cometarum exemplis deinceps patebit. 135.

De Mundi Systemate. cursui planetarum contrarias secuti, moventur omnifariam liberrimè, & motus suos, etiam contra cursum planetarum diutissimè conservant. (l) Fallor ni genus planetarum sint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod scriptores aliqui meteora esse volunt, argumentum à capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. (m) Capita cometarum atmosphæris ingentibus cinguntur; & atmosphæræ infernè densiores esse debent. Unde nubes sunt, non ipsa cometarum corpora, in quibus mutationes illæ visuntur. Sic terra si è planetis spectaretur, luce nubium suarum proculdubio splenderet, & corpus firmum sub nubibus propè delitesceret. Sic cingula jovis in nubibus planetæ illius formata sunt, quæ situm mutant inter se, & firmum jovis copus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora cometarum sub atmosphæris & profundioribus & crassioribus abscondi debent.

PROPOSITIO XL. THEOREMA XX.

Cometas in sectionibus conicis umbilicos in centro solis habentibus moveri, & radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describere.

(n) Patet per corol. 1. prop. XIII. libri primi, collatum cum prop. VIII. XII. & XIII. libri tertii.

Co-

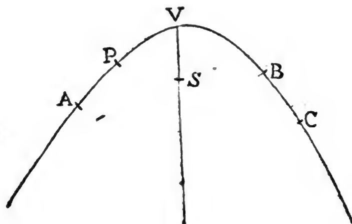
135. (l) * *Fallor, ni genus planetarum sint.* Quam gravibus fundamentis nitatur hæc sententia manifestum erit posteà ex variis cometarum phænomenis.

(m) * *Capite cometarum* atmosphæris ingentibus cingi variis argumentis imposterum confirmat Newtonus. Cæterum in ipsis cometarum corporibus non fieri perpetuas mutationes illas in decursu constabit independenter omninò ab illâ opinione quæ cometis ingentes atmophæras tribuit.

(n) * *Patet.* Quoniam cometæ motu suo lineas curvas circà solem describunt, ut ex observationibus constat, vi aliquâ à motu rectilineo detorquentur (per leg. 1.). Quoniam autem hæc vis quæ planetas à lineis rectis detorquet maximè tendit versùs solem ut pote corpus cætera omnia systematis solaris corpore longe superans, eadem quoque vis in cometis solem maxime debet respicere. Sed vis acceleratrix in planetis est in duplicatâ ratione distantiarum à sole inversâ (prop. 8. lib. 3.). Quare eandem quoque legem observare debent cometæ quæ sunt corpora planetis similia ac proinde (cor. prop. 13. lib. 1. & prop. 13. lib. 3.)

come-

Corol. 1. Hinc si cometæ in orbem redeunt; orbes erunt ellipses, & tempora periodica erunt ad tempora periodica planeta- LIBER TERTIUS. PROP. XL. THEOR. XX.



cometæ non secus ac planetæ in sectionibus conicis umbilicos in centro solis habentibus moventur & radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describunt. Hæc ità se habent, si sol è loco suo nullatenus moveatur; sed quamvis sol per attractionem planetarum perpetuo motu agitetur, non tamen longe recedit à communi gravitatis centro planetarum omnium, ideóque etiam cometæ qui in regionibus à sole maximè dissitis commorantur, non magnopere hujus centri situm turbare possunt. Quare orbitarum suarum umbilicus non longe distabit à centro solis, ac proindè propositio hæc vera est quamproximè. Quantum accurate observatis cometarum motibus congruat patebit deinceps.

136. Keplerus aliique post eum astronomi non pauci cometas in lineis rectis moveri posuerunt, & indè cometarum quorumdam loca observationibus satis congrua calculo investigarunt. Res ità succedere potest, si observetur cometa in eâ tantùm orbitæ suæ parte quæ à rectâ non multum differat. Sit APVBC, Sectio conica admodùm excentrica in cujus umbilico altero S collocatum sit solis centrum. Ponamus cometam observari, dum orbitæ suæ partem AP, describit, fieri potest ut reliquo tempore, dum scilicet à loco P, per V, B, ad locum C promovetur, in regiones remotissimas abiens oculis se subducat & sub radiis solaribus delitescat respectu observatoris in tellure circà solem S motâ, vel etiam accidere potest ut, motu telluris ità exigente, cometa percurrens orbitæ partem APVB, sub solaribus radiis abscondatur & tunc primum observetur cum ad locum B pervenerit, lineam BC descripturus. In hoc utroque casu via cometæ à lineâ rectâ parum differet. In primo casu, cometæ à Sole absorpti credentur, quia ad solem accedentes, pro destructis habebuntur. In altero casu, e sole videbuntur emergere, quia tunc primum sese conspicuos præbuerunt, dum à Sole in remotas regiones discedebant. Porrò dum cometa versus solem descendit, putà dum AP percurrit posteà ad solem accedens sub ejus radiis latet, putà dum PVB describit, tandemque dum ad alteras solis partes subitò emergit, usurpatur sæpè pro novo cometa à priori in AP diverso, & duæ rectæ AP, BC pro duabus trajectoriis habentur. Ex his patet cur trajectoriæ rectilineæ, observatis cometarum motibus ple- 136.

Ffff 2

netarum in (o) axium principalium ratione ſeſquiplicatâ. (P) Ideoque cometæ maximâ ex parte ſupra planetas verſantes, & eo nomine orbes axibus majoribus deſcribentes, tardius revolventur. Ut ſi axis orbis cometæ ſit quadruplo major axe orbis Saturni, tempus revolutionis cometæ erit ad tempus revolutionis ſaturni, id eſt, ad annos 30. ut $4\sqrt{4}$ (ſeu 8) ad 1. ideoque erit annorum 240.

Corol. 2. (p) Orbes autem erunt parabolis adeo finitimi, ut eorum vice parabolæ ſine erroribus ſenſibilibus adhiberi poſſint.

Corol. 3. Et propterea (per corol. 7. prop. XVI. lib. 1.) velocitas cometæ omnis, erit ſemper ad (q) velocitatem planetæ cujuſvis circa ſolem in circulo revolventis, in ſubduplicatâ ratione duplæ diſtantiæ planetæ à centro ſolis, ad diſtantiam cometæ à centro ſolis quamproximè. Ponamus radium orbis magni, ſeu ellipſeos in quâ terra revolvitur ſemidiametrum maximam eſſe partium 100000000: & (r) terra motu ſuo diurno mediocri deſcribet partes 1720212, & motu horario partes $71675\frac{1}{2}$. Ideoque cometa in eâdem telluris à ſole diſtantiâ mediocri, eâ cum velocitate quæ ſit ad velocitatem telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, deſcribet motu ſuo diurno partes 2432747, & motu horario partes $101364\frac{1}{2}$.

136. plerumque reſpondeant. Id fit ſcilicet eò quod aliqua dumtaxat portio trajectoriæ pro integrâ trajectoriâ habeatur. At ſi tota ſimul conſideretur tam in aſcenſu verſus ſolem quam in deſcenſu, aliam nullam præter Sectionem conicam ſatisfacere conſtabit.

(o) * *In axium principalium ratione ſeſquiplicatâ.* (Prop. 15 lib. 1.).

(P) * *Ideoque cometæ* maximâ ex parte ſuprà planetas verſantes, quo tempore ſcilicet oculos noſtros fugiunt & eo nomine orbes axibus majoribus quam planetæ deſcribentes tardius revolventur.

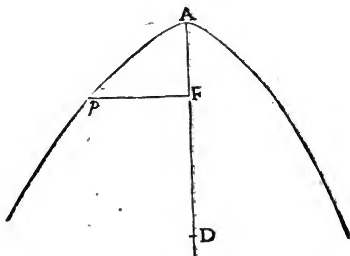
(p) * *Orbes autem parabolis adeò finitimi.* Orbes cometarum ſunt admodum excentrici, ut ex obſervationibus colligitur, & valdè exigua eſt portio orbis quem toto apparitionis tempore deſcribunt, exiguo enim temporis ſpatio ſeſe conſpicuos præbent. Verum ſi in ellipſi centrum ad infinitam ab umbilico diſtantiam removeatur, portio ellipſis cujus abſciſſa finita eſt, abit in parabolam. Quare elliptici orbes cometarum erunt parabolis valdè finitimi.

(q) * *Ad velocitatem planetæ cujuſvis* circà ſolem in circulo revolventis, hoc eſt, ad velocitatem ejus mediocrem.

(r) * *Et terra.* Fiat hæc analogia: ut eſt tempus periodicum terræ circà ſolem ad totam peripheriam circuli 3.141, ità dies una vel hora una ad partem peripheriæ unâ die vel horâ unâ deſcriptam.

$101364\frac{1}{2}$. (f) In majoribus autem vel minoribus distantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in subduplicatâ ratione distantiarum reciprocè, ideoque datur.

Corol. 4. (t) Unde si latus rectum parabolæ quadruplo majus sit radio orbis magni, & quadratum radii illius ponatur esse partium 100000000: area quam cometa radio ad solem ducto singu-



(f) * *In majoribus autem vel minoribus.* (Cor. 6. prop. 4. & prop. 15. lib. 1. vel per cor. 6. prop. 16. ejusdem libri).

(t) * *Undè si latus rectum.* Ex umbilico parabolæ F, ducatur ad axem A D, ordinata P F, erit area A p F, ad aream circuli quartâ parte lateris recti seu radio A F descripti (theor. 1. de parabolâ lib. 1.) ut $\frac{4}{3}$ ad 3.14159. Nam si radius circuli sumatur æqualis unitati, erit area circuli ad quadratum diametri, ut 3.14159 ad 4. Sed rectangulum sub ordinatâ p F & abscissâ F A, est dimidium hujus quadrati, hoc est 2, & area parabolica A p F, hujus rectanguli duæ tertiæ partes, hoc est $\frac{4}{3}$ (per theor. 4. de parab. lib. 1.).

Quarè area parabolica A p F, est ad aream circuli radio A F, descripti ut $\frac{4}{3}$ ad 3.14159. Si igitur velocitas cometæ revolventis in parabolâ eadem esset cum velocitate planetæ gyrantis in circulo, in eâdem quoque ratione foret tempus quo cometa describit arcum parabolæ A p, ad tempus periodicum planetæ. Sed velocitas cometæ est ad velocitatem planetæ in eâdem distantiâ à sole ut $\sqrt{2}$ ad 1, in hâc igitur ratione diminuenda est prior ratio. Undè tempus quo cometa describit arcum parabolicum A p, erit ad tempus periodicum planetæ ut $\frac{4}{3 \times \sqrt{2}}$ ad $\frac{3.14159}{1}$. Sive ut $\sqrt{\frac{16}{9 \times 2}}$, hoc est, ut $\sqrt{\frac{8}{9}}$ ad 3.14159. 136.

DE MUNDI SYSTEMATE.

ſingulis diebus deſcribit, erit partium $1216373\frac{1}{2}$, & ſingulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$. (u) Sin latus rectum majus ſit vel minus in ratione quàvis, erit area diurna & horaria major vel minor in eâdem ratione ſubduplicatâ.

(x) LEMMA V.

Invenire lineam curvam generis parabolici, quæ per data quotcunque puncta tranſibit.

Sunto puncta illa *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, &c. & ab iiſdem ad rectam quamvis poſitione datam *HN* demitte perpendicula quotcunque *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, *EM*, *FN*.

Caſ.

136. Jam tempus periodicum terræ circà ſolem ſit 365.2565 dier. & cometa in perihelio ad diſtantiam æqualem diſtantiæ terræ à ſole ſupponatur, tempus quo cometa deſcribet arcum parabolicum Ap, per hanc analogiam invenitur: ut eſt 3.14159 ad $\sqrt{\frac{8}{9}}$, ità 365.2565 ad tempus quæſitum quod erit 109. dier. 14 hor. 46′. Si quadratum radii ponatur eſſe partium 100000000. erit area parabolica harum partium 133333333, quas cometa radiis ad ſolem ductis deſcribit diebus 109. hor. 14.46′. Quare area quam cometa ſingulis diebus deſcribit, erit partium $1216373\frac{1}{2}$ & ſingulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$.

(u) * *Sin latus rectum.* Tempora quibus cometa in diſtantiis inæqualibus areas parabolicas ſimiles deſcriberet, ſunt ut revolutiones in circulis, ideóque in ratione diſtantiarum ſeſquiplicatâ (cor. 6. prop. 4 lib. 1.), id eſt, majus temporis intervallum requiritur ut cometa in majori parabolâ aream ſimilem deſcribat, minus autem in minori, ac proinde cometa tempore æquali minorem partem parabolæ majoris & majorem parabolæ minoris deſcriberet, idque in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum inverſâ, hoc eſt, poſitâ ratione diſtantiarum $\frac{d}{e}$, erit ratio arearum æquali tempore deſcriptarum ut $\frac{1}{d\sqrt{d}}$ ad $\frac{1}{e\sqrt{e}}$. Sed areæ ſimiles parabolarum inæqualium ſunt in ratione duplicatâ laterum rectorum (112. lib. I.). Sive diſtantiarum quæ ſunt laterum rectorum pars quarta (cor. 2. theor. 1. de parab. lib. 1.). Quare ratio prior in hâc ratione duplicatâ augenda eſt, totaque ratio compoſita erit ut $\frac{dd}{d\sqrt{d}}$ ad $\frac{ee}{e\sqrt{e}}$, hoc eſt, ut $\sqrt{d}$ ad $\sqrt{e}$, quæ eſt ratio ſubduplicata diſtantiarum ſive laterum rectorum. Patet aream minorem fieri in eâdem ratione ſubduplicatâ, ſi ratio ſeſquiplicata diſtantiarum minuatur in ratione duplicatâ laterum rectorum ſeu diſtantiarum.

(x) * *Lemma.* Totum illud Lemma exponitur num. 76. lib. 2.

Caſ. 1. Si punctorum H, I, K, L, M, N æqualia ſunt intervalla HI, IK, KL, &c. collige perpendiculorum AH, BI, CK, &c. differentias primas b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$, &c. ſecundas c, $2c$, $3c$, $4c$, &c. tertias d, $2d$, $3d$, &c. id eſt, ita ut ſit $AH - BI = b$, $BI - CK = 2b$, $CK - DL = 3b$, $DL + EM = 4b$, $-EM + FN = 5b$, dein $b - 2b = c$, &c. & ſic pergatur ad

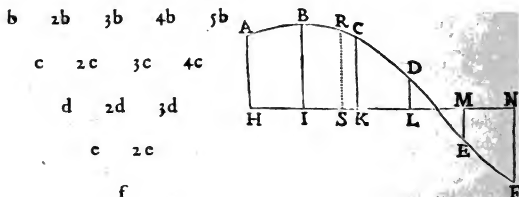
b	2b	3b	4b	5b
c	2c	3c	4c	
d	2d	3d		
e	2e			
f				

differentiam ultimam, quæ hic eſt f. Deinde erecta quacunque perpendiculari RS, quæ fuerit ordinatim applicata ad curvam quæſitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla HI, IK, KL, LM, &c. unitates eſſe, & dic $AH = a$, $-HS = p$, $\frac{1}{2}p$ in $-IS = q$, $\frac{1}{3}q$ in $+SK = r$, $\frac{1}{4}r$ in $+SL = s$, $\frac{1}{5}s$ in $+SM = t$; pergendo videlicet ad uſque penultimum perpendiculum ME, & præponendo ſigna negativa terminis HS, IS, &c. qui jacent ad partes puncti S verſus A, & ſigna affirmativa terminis SK, SL, &c. qui jacent ad alteras partes puncti S. Et ſignis probe obſervatis, erit $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Caſ. 2. Quod ſi punctorum H, I, K, L, &c. inæqualia ſint intervalla HI, IK, &c. collige perpendiculorum AH, BI, CK, &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum diviſas b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$; ſecundas per intervalla bina diviſa c, $2c$, $3c$, $4c$, &c. tertias per intervalla terna diviſas d, $2d$, $3d$, &c. quartas per intervalla quaterna diviſas e, $2e$, &c. & ſic

DE MUNDI SYSTEMATE.

ſic deinceps; id eſt, ita ut ſit $b = \frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$, $3b = \frac{CK - DL}{KL}$, &c. dein $c = \frac{b - 2b}{HK}$, $2c = \frac{2b - 3b}{IL}$, $3c = \frac{3b - 4b}{KM}$, &c. poſtea $d = \frac{c - 2c}{HL}$, $2d = \frac{2c - 3c}{IM}$, &c. Inventis



differentiis, dic $AH = a$, $-HS = p$, p in $-IS = q$, q in $+SK = r$, r in $+SL = s$, s in $+SM = t$; pergendo ſcilicet ad uſque perpendiculum penultimum ME, & erit ordinatim applicata $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Corol. Hinc areæ curvarum omnium inveniri poſſunt quamproximè. Nam ſi curvæ cujuſvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot, & parabola per eadem duci intelligatur: erit area parabolæ hujus eadem quamproximè cum area curvæ illius quadrandæ. (y) Poteſt autem parabola per methodos notiſſimas ſemper quadrari Geometricè.

LEM-

136. (y) * *Poteſt autem Parabola*, per methodos notiſſimas (165. lib. 1.) ſemper quadrari geometricè. Inveniatur itaque æquatio definiens curvam parabolicam quæ tranſibit per curvæ quadrandæ puncta quotlibet, erit area parabolæ hujus eadem quamproximè cum areâ curvæ illius quadrandæ. Quò plura ſunt puncta curvæ propoſitæ per quæ tranſit curva Parabolica, eò propius area hujus accedit ad aream illius.

LEMMA VI.

Ex observatis aliquot locis cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

Designent HI, IK, KL, LM tempora inter observationes HA, IB, KC, LD, ME observatas quinque longitudines cometæ, HS tempus datum inter observationem primam & longitudinem quæsitam. Et si per puncta A, B, C, D, E duci intelligatur curva regularis $ABCDE$; & per lemma superius inveniatur ejus ordinatim applicata RS, erit RS longitudo quæsita.

Eadem methodo ex observatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

(z) Si longitudinum observatarum parvæ sint differentiæ, puta graduum tantum 4 vel 5; suffecerint observationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin majores sint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt observationes quinque adhiberi.

L E M-

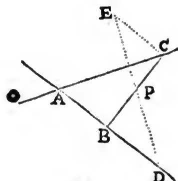
(z) 137. * *Si longitudinum observatarum*, (patet per not. in cor. præc.). Methodus Lemmatis præcedentis quæ methodus interpolationum dici solet, in rebus Astronomicis usus habere potest eximios. Hanc methodum adhibuit Clariss. Maierus tom 2. Comment. Acad. Petropol. ad investiganda solstitiorum momenta. Circà tempus solstitii observentur aliquæ Solis altitudines meridianæ, illasque Solis altitudines repræsentent quædam ordinatæ, & tempora inter observationes elapsa ordinatarum intervallis exhibeantur. Deinde transeat Parabola per extremitates ordinatarum, abscissa quæ correspondet minimæ ordinatæ, tempus solstitii determinabit. Cæterum definiri potest tempus solstitii per plures observationes & parabolam plurium dimensionum, vel per tres observationes duntaxat & parabolam conicam, uti fecit Halleius. Verum in quocumque casu adhibeatur interpolationum methodus, oportet differentias observatas sensibiliter majores esse erroribus qui in ipsâ observatione committi possunt, hâc autem adhibitâ curâ, satis accurate determinari poterunt plurima astronomiæ phænomena quæ aliâ quidem viâ forent determinatu difficillima. Elegantissimum ejusdem methodi exemplum dedit eximius geometra D. Clairaut in Mem. Paris. an. 1736., ubi determinandæ telluris figuræ modum exponit ex mensurâ plurium meridiani arcuum in diversis latitudinibus captâ. 137.

De Mundi Systemate.

LEMMA VII.

Per datum punctum P *ducere rectam lineam* BC, *cujus partes* PB, PC, *rectis duabus positione datis* AB, AC *abscissæ, datam habeant rationem ad invicem.*

A puncto illo *P* ad rectarum alterutram *AB* ducatur recta quævis *PD*, & producatur eadem versus rectam alteram *AC* usque ad *E*, ut sit *PE* ad *PD* in datâ illâ ratione. Ipsi *AD* parallela sit *EC*; & si agatur *CPB*, erit *PC* ad *PB* ut *PE* ad *PD*. *Q. E. F.*



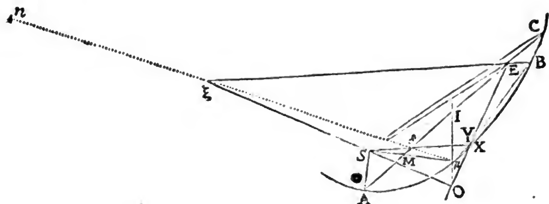
LEMMA VIII.

Sit ABC *parabola umbilicum habens* S. *Chorda* AC *bisecta in* I *abscindatur segmentum* ABCI, *cujus diameter sit* $I\mu$ *&* *vertex* μ. *In* $I\mu$ *producta capiatur* μO *æqualis dimidio ipsius* $I\mu$. *Jungatur* OS, *& producatur ea ad* ξ, *ut sit* $S\xi$ *æqualis* 2SO. *Et si cometa* B *moveatur in arcu* CBA, *& agatur* ξB *secans* AC *in* E: *dico quod punctum* E *abscindet de chordâ* AC *segmentum* AE *tempori proportionale quamproximè.*

Jungatur enim *EO* secans arcum parabolicum *ABC* in *Y*, & agatur μX, quæ tangat eundem arcum in vertice μ; & actæ *EO* occurrat in *X*; & (a) erit area curvilinea $AEX\mu A$ ad aream curvilineam $ACY\mu A$ ut *AE ad AC*. Ideoque cum trian-

137. (a) * *Et erit area.* Quoniam chorda AC bisecta est in I, erit semisegmentum $A\mu I$ æquale semisegmento μIC. Item quia μX tangit parabolam in μ, erit μX, parallela chordæ AC (per Lem. 4. de conic. lib. 1.) ac proinde triangulum

triangulum *ASE* sit ad triangulum *ASC* in eâdem ratione, erit area tota *ASEXμA* ad aream totam *ASCYμA* ut *AE* ad *AC*. Cum autem *ξO* sit ad *SO* ut 3 ad 1, & *EO* ad *XO* in eâdem ratione, erit *SX* ipsi *EB* parallela: & propterea si jungatur *BX*, erit triangulum *SEB* triangulo *XEB* æquale.

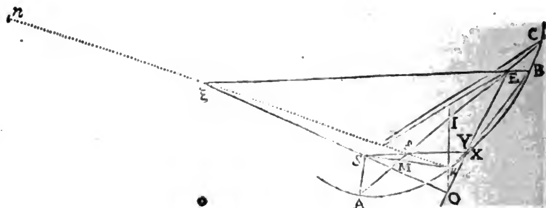


Unde si ad aream *ASEXμA* addatur triangulum *EXB*, & de summa auferatur triangulum *SEB*, manebit area *ASBXμA* areæ *ASEXμA* æqualis, atque ideo ad aream *ASCYμA* ut *AE* ad *AC*. Sed areæ *ASBXμA* æqualis est area *ASBYμA* (b) quamproximè, & hæc area *ASBYμA* est ad aream *ASCY*

lum O I E simile est triangulo O μ X, idedque ob I O triplam ipsius μ O, erit triangulum I O E trianguli μ O λ, noncuplum & triangulum I O E trapezii IμXE, sesquioctavum. Prætereà triangulum IAO, est trianguli I A μ, sesquialterum (omittuntur in figurâ aliquæ lineæ ad vitandam confusionem) cum idem sit trianguli utriusque vertex A, sitque basis O I sesquialtera basis μ I; triangulum verò A μ I, subsesquitertium est semisegmenti A μ I (prop. 24. Archimed. de parab vel theor. 4. de parab. lib. 1.). Quare triangulum A O I est sesquioctavum semisegmenti A μ I, hoc est, in ratione compositâ ex rationibus sesquialterâ & subsesquitertiâ ac proinde triangulum A O I, est ad semisegmentum A μ I, sicut triangulum IOE, ad trapezium μ X I E, & vicissim trapezium μ X I E est ad semisegmentum AμI ut I E ad A I, ac proinde, componendo, area curvilinea A μ X E, est ad semisegmentum A μ I, ut A E, ad A I, ideóque area curvilinea A μ X E est ad segmentum totum A μ C ut A E ad A C. 137.

(b) * *Quamproximè.* Ob viciniam punctorum μ, X (ex hyp.).

DE MUNDI SYSTEMATE. $ASCY\mu A$, (c) ut tempus descripti arcus AB ad tempus descripti arcus totius AC. Ideoque AE est ad AC in ratione temporum quamproximè *Q. E. D.*



Corol. Ubi punctum B incidit in parabolæ verticem μ, est AE ad AC in ratione temporum accuratè (d).

Scho-

(c) * *Ut tempus descripti arcûs.* (prop. 1. lib. 1.).

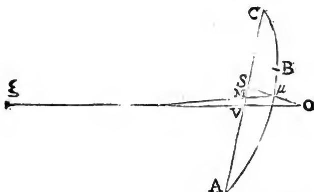
(d) * *Accuratè.* Ideò enim in casu Lemmatis hujus A E non est ad A C in ratione temporum accuratè, quia area A S B X μ A, sumpta est æqualis areæ A S B Y μ A, quod verum est duntaxat quamproximè. Sed coincidentibus punctis B, μ, areæ illæ æquales fiunt accuratè, quare in hoc casu A E est ad A C, in ratione temporum accuratè.

138. Quoniam coincidentibus punctis B, μ, chorda A C dividitur in E in ratione temporum accuratè, iisdem verò punctis non coincidentibus, hæc chorda dividitur in ratione temporum quamproximè tantùm, quò propius erit punctum B vertici parabolæ μ, eò magis accuratè dividetur chorda A C in duo segmenta quæ temporum rationem habeant. Observandum est chordam A C magis accuratè dividi in ratione temporum, si B distet à vertice μ versus C quam si ab eodem vertice μ, versus A, æquali intervallo distet. Quoniam enim parabolæ portio μ A vertici principali propior est, ea fit curvior & à tangente μ X, magis deflectit quam portio μ C, à vertice μ, remotior. Quare si investiganda sint tria temporis momenta quibus cometa in parabolæ locis tribus A, B, C, versatur ità ut A E sit ad A C, ut temporum intervalla accuratè, sumenda sunt prædicta tempora ferè æqualia. Nam ob exiguas trajectoriæ parabolicæ portiones astronomicis observationibus subjectas, pun-

Scholium.

Si jungatur $\mu\xi$ secans AC in δ, & in ea capiatur ξn, quæ sit ad μB ut 27 MI ad 16 $M\mu$: acta Bn secabit chordam AC in

punctum E, non multum distat à chordæ medio puncto I. Oportet autem intervallum illud, ubi cometa tardior est, paulò majus esse altero; cometa enim existente in μ, ubi chorda A C, dividitur accurate in ratione temporum; erit recta E C, major quam A E, hoc est, tempus quo cometa tunc tardior (cor. 3. prop. 40. lib. huj.) describit arcum BC, majus est tempore quo idem cometa factus velocior describit arcum B A. Accuratius itaque eligentur tempora parum inæqualia ut punctum E potius abeat versus C, quam versus A, ob rationem modo allatam.



139. Si vertex μ, segmenti parabolici A μ C parum distet à vertice principali, sitque punctum B proximum puncto μ, recta S μ, ex parabolæ umbilico S, ad verticem μ, ducta dividet chordam A C, in M, ferè in ratione temporum, ut ex præcedentibus patet.

140. Si fuerit recta S μ, admodum magna respectu abscissæ μ I, erit S V, tripla ipsius M V. Quoniam enim rectæ S V O, S M μ; in hoc casu pro parallelis haberi possunt, erit I V ad V M ut I O ad μ O, hoc est, (per constr. Lem. 8.) ut 3 ad 1.

141. Iisdem positis, erit V ξ = 3 V S + 3 I μ; quoniam enim (per constr.) S ξ = 2 S O, erit O ξ = 3 S O = 3 S V + 3 V O. Jam utrinque auferatur V O, fiet V ξ = 3 S V + 2 V O. Sed ob rectas VO, M μ parallelas, V O est ad M μ, ut I O ad I μ, hoc est, ut 3 ad 2, ideóque 2 V O = 3 M μ. Præterea rectæ S μ, I μ, æquales constituunt angulos cum rectâ tangente parabolam in μ, quæ est chordæ A C parallela (per theor. 3. de parab. & lem. 4. de conic.). Quare æquales sunt anguli MI μ, IM μ, ac proinde recta M μ = I μ; unde fit 3 I μ = 2 V O, & V ξ = 3 V S + 3 I μ. 141.

De Mundi Systemate.

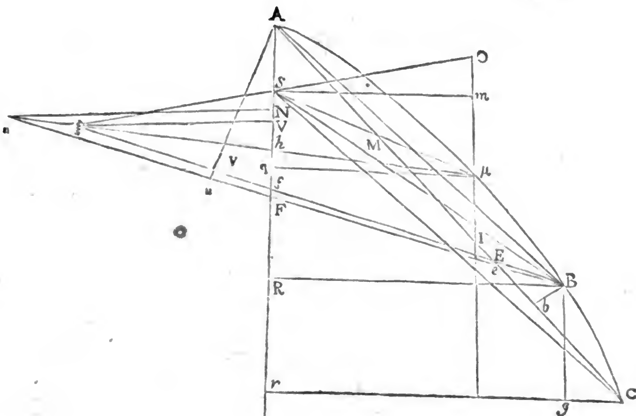
in ratione temporum (e) magis accuratè quam priùs. Jaceat autem punctum n ultra punctum ξ, si punctum B magis distat à

142. (e) 142. * *Magis accuratè quam priùs.* Sit A vertex principalis parabolæ, S umbilicus, $AS = f$, ideóque latus rectum principale $= 4f$. Ponatur $RB = y$, $rC = x$, erit area $ASBC = \frac{x^3 + 12f^2x}{24f}$, & area $ASBA = \frac{y^3 + 12f^2y}{24f}$ (theor. 4. de parab.); ac proinde area $ASBC$, est ad aream $ASBA$, ut $\frac{x^3+12f^2x}{24f}$ ad $\frac{y^3+12f^2y}{24f}$, seu ut $x^3 + 12f^2x$ ad $y^3 + 12f^2y$, id est, in ratione temporum accuratè. Præterea est $AC = \sqrt{Ar^2 + rC^2} = \frac{\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f}$; quarè si fiat $x^3 + 12f^2x$ ad $y^3 + 12f^2y$ ut $\frac{\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f}$ ad $AE = \frac{(y^3+12f^2y)\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f(x^3+12f^2x)}$, erit quoque recta AC ad hanc rectam AE, in ratione temporum accuratè.

Jam verò investigandus est valor rectæ AE, qui prodit ex constructione Lemmatis præcedentis. Ex umbilico S, erigatur ad μO perpendicularis Sm, hæc erit æqualis ordinatæ $q\mu$. Deinde (theor. 1. de parab.) $q\mu$, dimidia est ipsius rC, seu $\frac{1}{2}x$, & $\mu m = qS = \frac{xx-16ff}{16f}$. Præterea est $\mu I = 2\mu O$ (per constr.) & $\mu I = \frac{AI^2}{4S\mu}$ (165 & theor. 2. de parab.). Sed est $AI^2 = \frac{x^4+16f^2x^2}{64f^2}$, & $S\mu^2 = \left(\frac{x^2-16f^2}{16f}\right)^2 + \frac{1}{4}xx$, quare est μO seu $\frac{AI^2}{8S\mu} = \frac{x^4+16f^2x^2}{32fx^2+512f^2x}$, ac proindè $mO = \mu O - m\mu = \frac{x^4+16f^2x^2}{32fx^2+512f^2x} + \frac{16ff-xx}{16f}$, ideóque $SO = \sqrt{\frac{1}{4}xx + \left(\frac{x^4+16f^2x^2}{32fx^2+512f^2x} + \frac{16ff-xx}{16f}\right)^2}$, & $\xi O = 3\sqrt{\frac{1}{4}xx + \left(\frac{x^4+16f^2x^2}{32fx^2+512f^2x} + \frac{16ff-xx}{16f}\right)^2}$. Insuper ex puncto ξ, ad abscissam AR erectâ perpendiculari ξV, ob similitudinem triangulorum SmO, $S\xi V$, fit $SO : q\mu = \xi S : \xi V$, ideóque $\xi V = x$. Præterea $SO : mO = S\xi : SV$, ac proinde $SV = 2mO$, hincque prodit $AV = AS + 2mO$, & $VR = AR - AS - 2mO$. Sed ob triangulorum similitudinem $\xi V\,(x) : BR\,(y) = Vf : Rf$, & componendo, $\xi V + BR : BR = Vf + Rf : Rf$, quare $Rf = \frac{VR + BR}{\xi V + BR}$, datur itaque Rf, per x & y. Prætereà $fB^2 = RB^2 + Rf^2$, sed $RB : Bf = \xi V : \xi f = \frac{\xi V \times Bf}{RB} = \frac{x \times \sqrt{RB^2+Rf^2}}{y}$, & hinc $\xi B = \sqrt{RB^2+Rf^2} + \frac{x \times \sqrt{RB^2+Rf^2}}{y}$. Deinde in triangulo ABC, dantur latera AB, AC, & prætereà datur latus BC; ductâ enim Bg perpendiculari ad rC, erit $BC = \sqrt{Bg^2 + gC^2} = \sqrt{Rr^2 + (RB - rC)^2}$; datur itaque perpendicularis $Bb = \sqrt{\frac{3}{4}BC^2}$. Insuper ducatur AV perpendicularis ad AB, ob similitudinem triangulorum AVf, BRf, erit $Af : AV = Rf : RB$, ideóque $AV = \frac{RB \times Af}{Rf}$. Denique ductâ Bb, perpendiculari ad AC, similia erunt triangula EAV, Bbe, ac proinde $Bb : bE = AV : AE$, & invertendo $Bb : AV = bE : AE$, atque, componendo $Bb + AV : AV = bE + AE : AE$, hinc $AE =$

Ab

à vertice principali parabolæ quam punctum μ; & citra, si minus distat ab eodem vertice.



$\frac{Ab \times AV}{Bb + AV}$. Jam loco Ab, Bb, AV, substitutis eorum valoribus modò inventis prodit AE, paulò minor quam $\frac{(y^3 + 12f^2y)\sqrt{x^4 + 16f^2x^2}}{4f(x^3 + 12f^2x)}$.

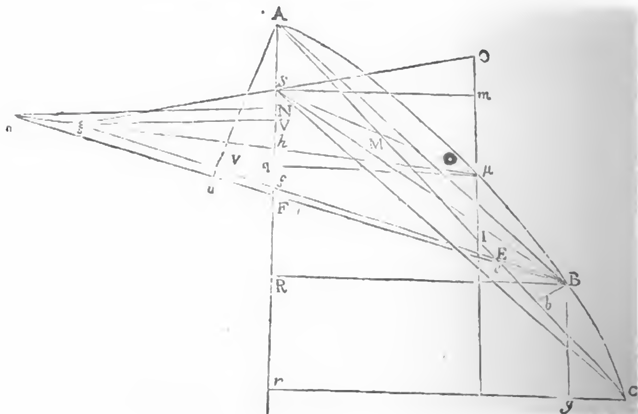
Investigandus superest valor rectæ Ae, qui prodit ex constructione scholii hujus. Quoniam similia sunt triangula ξSh, $\xi O\mu$, erit $\xi S : Sh = \xi O : O\mu$, hinc $Sh = \frac{\xi S \times O\mu}{\xi O}$; Sed inventa est suprà recta Sq, invenietur itaque qh, ac proindè etiam $h\mu = \sqrt{qh^2 + q\mu^2}$. Præterea $\xi S : SO = \xi h : h\mu$, quarè $\xi h = \frac{S\xi \times \sqrt{qh^2 + q\mu^2}}{SO}$, ac proindè tota 142. recta $\xi\mu = \sqrt{qh^2 + q\mu^2} + S\xi \times \frac{\sqrt{qh^2 + q\mu^2}}{SO}$.

Deindè (per constr.) fit $\xi n = \frac{27\, MI \times \mu B}{16\, M\mu}$. Sed $AM : MI = AS : I\mu$, ac proindè, componendo $AM + MI : MI = AS + I\mu : I\mu$, invenietur itaque MI, ideóque tota recta $n\mu$. Insuper $h\mu : qh = hr : hM$, invenietur itaque hN, ac proindè & Nn, ob triangulum hrN, rectangulum.

DE MUNDI SYSTEMATE.

lum. Præterea (ex præced.) inventa est hR, ideoque etiam datur nR. Jam fiat rN : NF = BR : RF, & invertendo NF : RF = rN : BR, atque componendo NF + RF : RF = rN + BR : BR, hinc

142. $RF = \frac{BR \times NR}{rN + BR}$, ideoque datur $BF = \sqrt{BR^2 + RF^2}$. Deinde BF : BR = rF : FN, & inde $rF = \frac{BF \times FN}{BR}$, atque recta tota $rB = \frac{BF \times FN}{BR} + \sqrt{BR^2 + RF^2}$. Ducatur recta Au, perpendicularis ad AB, erit ob triangulorum AuF, RBF, similitudinem AF : Au = RF : RB, ideo-



que $Au = \frac{RB \times AF}{RF}$, & hinc prorsus ut suprà habetur $Ae = \frac{Ab \times Au}{Bb + Au}$. Ex hactenus dictis patet dari rectas AE, Ae, per x, y, & quantitates constantes. Jam loco Ab, Bb, Au, substitutis eorum valoribus analyticis, fit Ae, paulò major quam AE, & paulò minor quam $\frac{(y^3 + 12f^2y)\sqrt{x^4 + 16f^2x^2}}{4f(x^3 + 12f^2x)}$.

Quarè recta Bn, secabit chordam AC, in e, in ratione temporum magis accuratè quàm recta ξB.

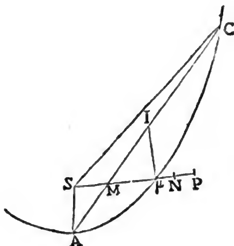
Idem scholium faciliùs demonstrari potest hoc modo. Quoniam $Ae = \frac{Ab \times Au}{Ab + Au} = Ab - \frac{Ab \times Ab}{Au + Bb}$ (ex dem.) erit Ae semper minor quam Ab. Jam verò factâ analogiâ $x^3 + 12f^2x : y^3 + 12f^2y =$ V,

LIBER TERTIUS. PROP. XL. THEOR. XX.

(f) LEMMA IX.

Rectæ I μ *&* μ M *& longitudo* $\frac{AIq}{4S\mu}$ *æquantur inter se.*

Nam $4\,S\mu$ est latus rectum parabolæ pertinens ad verticem μ.



LEMMA X.

Si producatur S μ *ad* N *&* P, *ut* μ N *sit pars tertia ipsius* μ I, *&* S P *sit ad* S N *ut* S N *ad* S μ. *Cometa, quo tempore des-*

$\frac{\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f} : \frac{(y^3+12f^2y)\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f\sqrt{x^3+12f^2x}}$, si A e æqualis foret huic quarto termino haberetur ratio temporum accuratè (prop. 1. lib. 1.). Sed quartus ille terminus major est rectâ Ae; nam terminus ille major est quam chorda AB, est enim AB $= \frac{\sqrt{y^4+16f^2y^2}}{4f} = \sqrt{x^3+12f^2x} \times \frac{\sqrt{y^4+16f^2y^2}}{4f\sqrt{x^3+12f^2x}}$ hæc autem quantitas minor est quam $\frac{(y^3+12f^2y)\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f\sqrt{x^3+12f^2x}}$. Sed (per constr.) ità ducitur μn, ut recta nB semper secet chordam A C in puncto e, quod proximius est puncto C quam punctum E; quarè cum recta A e semper minor sit verâ, major tamen quam A E, hæc magis quam illa ad justum valorem accedet, ac proindè recta n B, secat chordam A C, in ratione temporum magis accurate quam recta ξ B. Res eodem modo demonstratur, ubicumque sumatur punctum A. 142.

(f) * *Lemma IX.* (Patet per num. 139. lib huj. & theor. 1. & 2. de parab. lib. 1.).

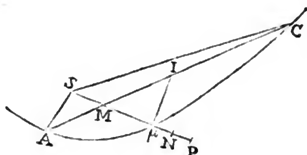
describit arcum A μ C, *si progrederetur eâ semper cum velocitate quam habet in altitudine ipsi* SP *æquali, describeret longitudinem æqualem chordæ* AC.

Nam si cometa velocitate, quam habet in μ, eodem tempore progrederetur uniformiter in rectâ, quæ parabolam tangit in μ; (g) area, quam radio ad punctum *S* ducto describeret, æqualis esset areæ parabolicæ *ASC*μ. (h) Ideoque contentum sub longitudine in tangente descriptâ & longitudine *S*μ

142. (g) * *Area quam radio.* Cometa velocitate quam habet in μ, relictâ parabolâ, progrediatur uniformiter in rectâ μ Q, quæ parabolam tangit in μ, area S μ Q, quam radio ad punctum S, ducto describeret, æqualis esset areæ parabolicæ A S C μ, quam eodem tempore describit. Sumantur enim lineolæ C c, q μ, à cometa descriptæ & à parabolæ umbilico S, ad tangentes C t, μ T, erigantur perpendiculares S t, S T, velocitas in C, est ad velocitatem in μ, ut S T ad S t (cor. 1. prop. 1. lib. 1.) sed velocitates in C, & μ, sunt ut spatia eodem tempore percursa, puta C c & q μ; est igitur C c ad μ q ut S T ad S t. Quare triangulum S μ q, æquale est triangulo C S c. Illud autem ubique obtinet in triangulis minimis trilinea A S C μ, S μ Q constituentibus. Quia verò æqualia insumuntur tempora ad percurrendas lineas A C, μ Q (ex hyp.) ex æqualibus numero triangulis componuntur spatia A S C μ, S μ Q, ac proinde triangulum S μ Q, æquale est areæ parabolicæ, A S C μ.

(h) * *Ideòque.* Quoniam recta S μ, cum tangente in μ, & chordâ A C, æquales constituit angulos (Lem. 4. de conicis), spatium contentum sub longitudine descriptâ in tangente & rectâ S μ, erit ad spatium contentum sub chordâ A C, & rectâ S M, ut area A S C μ, ad triangulum A S C, id est, ut triangulum S A C + segm. parab. C A c ad triangulum S A C, id est, ut triangulum S A C + $\frac{2}{3}$ parallelo-

$S\mu$ esset ad contentum sub longitudinibus AC & SM, ut area $ASC\mu$ ad triangulum ASC, id est, ut SN ad SM. Quare AC est ad longitudinem in tangente descriptam, ut $S\mu$ ad SN. Cum autem velocitas cometæ in altitudine SP sit (per corol. 6. prop. XVI. lib. 1.) ad ejus velocitatem in



altitudine $S\mu$, in subduplicatâ ratione SP ad $S\mu$ inversè, id est, in ratione $S\mu$ ad SN; (i) longitudo hac velocitate eodem tempore descripta, erit ad longitudinem in tangente descriptam, ut $S\mu$ ad SN. Igitur AC & longitudo hâc novâ veloci-

lelogrammi AGFC, ad triangulum ASC, hoc est, ut $AC \times \frac{1}{2}SM + AC \times \frac{2}{3}I\mu$ ad $AC \times \frac{1}{2}SM$, sivè ut $SM + \frac{4}{3}I\mu$ ad SM. Sed μN, sumpta est æqualis $\frac{1}{3}I\mu$, & est $M\mu = \mu I$ (num. 139.). Quaré $MN = \frac{4}{3}I\mu$. Est igitur spatium contentum sub longitudine descriptâ in tangente & rectâ $S\mu$, ad spatium contentum sub chordâ AC, & rectâ SM, ut $SM + MN$ ad SM, hoc est, ut SN ad SM: Unde si longitudo descripta in tangente dicatur l, erit $l \times S\mu : AC \times SM = SN : SM$, ideóque longitudo descripta in tangente erit ad chordam AC, ut $\frac{SN}{S\mu}$ ad $\frac{SM}{SM}$, hoc est, ut SN ad $S\mu$. 141.

(i) * *Longitudo.* Nam longitudines iisdem temporibus uniformi motu descriptæ, sunt ut velocitates (5. lib. 1.).

locitate descripta, cum sint ad longitudinem in tangente descriptam in eâdem ratione, æquantur inter se. *Q. E. D.*

(k) *Corol.* Cometa igitur eâ cum velocitate, quam habet in altitudine $S\mu + \frac{2}{3} I\mu$, eodem tempore describeret chordam AC quamproximè.

LEMMA XI.

Si cometa motu omni privatus de altitudine SN *seu* $S\mu + \frac{1}{3} I\mu$ *demitteretur, ut caderet in solem, & eâ semper vi uniformiter continuatâ urgeretur in solem, quâ urgetur sub initio; idem semisse temporis, quo in orbe suo describit arcum* AC, *descensu suo describeret spatium longitudini* $I\mu$ *æquale.*

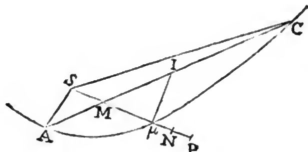
Nam cometa, quo tempore describit arcum parabolicum AC, eodem tempore eâ cum velocitate, quam habet in altitudine SP (per lemma novissimum) describet chordam AC, ideoque (per corol. 7. prop. XVI. lib. I.) eodem tempore in circulo, cujus semidiameter esset SP, vi gravitatis suæ revolvendo, describeret arcum, cujus longitudo esset ad arcus parabolici chordam AC, in subduplicatâ ratione unitatis ad binarium. Et propterea eo cum pondere, quod habet in solem in altitudine SP, cadendo de altitudine illâ in solem, describeret semisse temporis illius ((l) per corol. 9. prop. IV. lib. I.) spatium æquale quadrato semissis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis SP, id est, spatium $\frac{AIq}{4S\mu}$. (m) Unde cùm pondus co-

142. (k) * *Corol.* Si $S\mu$, sit admodum magna respectu μN, tres geometricè proportionales $S\mu$, SN, SP, erunt etiam arithmeticè proportionales quamproximè, id est NP, æquabitur μN, sive trienti ipsius $I\mu$, ideóque μP, æqualis quamproximè $\frac{2}{3}$ ipsius $I\mu$. Quarè patet collarium.

(l) * *Per corol. 9. prop. IV. lib. I.* Vel per num. 201. ejusdem lib.

(m) * *Undè cùm pondus cometæ.* Gravitas acceleratrix cometæ versus Solem in distantiâ SN, est ad gravitatem acceleratricem versus eundem in distantia SP, ut SP^2 ad SN^2, hoc est, ob proportionales SP, SN, $S\mu$, ut SP ad $S\mu$.

cometæ in solem in altitudine SN sit ad ipsius pondus in solem in altitudine SP, ut SP ad $S\mu$: cometa pondere quod habet in altitudine SN eodem tempore, in solem cadendo, descri-



bet spatium $\frac{AIq}{4\,S\mu}$, (n) id est, spatium longitudini $I\mu$ vel $M\mu$ æquale. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXI.

Cometæ in parabola moti trajectoriam ex datis tribus observationibus determinare.

Problema hocce longè difficillimum multimodè aggressus, composui problemata quædam in libro primo, quæ ad ejus solutionem spectant. Postea solutionem sequentem paulo simpliciorem excogitavi.

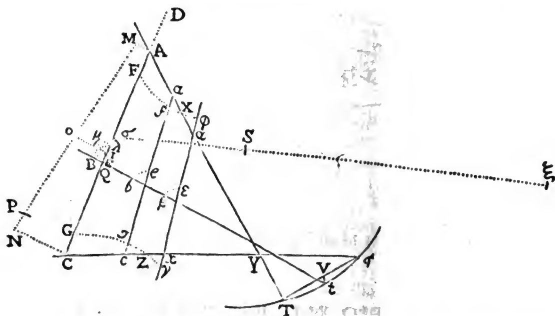
Seligantur tres observationes (o) æqualibus temporum intervallis

(n) * *Id est.* (Lem. IX.).

(o) * *Æqualibus temporum intervallis.* Ratio patet per not. 138. 142.

DE MUNDI SYSTEMATE.

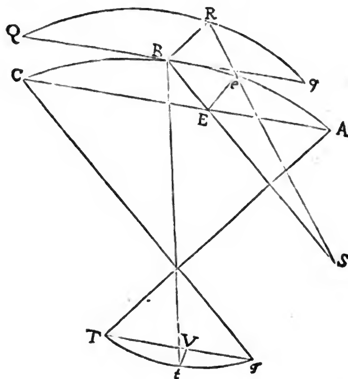
vallis ab invicem quamproximè distantes. Sit autem temporis intervallum illud, ubi cometa tardius movetur, paulo majus altero, ita videlicet ut temporum differentia sit ad summam temporum, ut summa temporum ad dies plus minus sexcentos; vel ut punctum *E* (in fig. lem. VII.) incidat in punctum *M* quamproximè, & inde aberret versus *I* potius quam versus *A*. (p) Si tales observationes non præsto sint, inveniendus est novus cometæ locus per lemma sextum.



Designet *S* solem, *T*, *t*, *τ* tria loca terræ in orbe magno, *TA*, *tB*, *τC* observatas tres longitudines cometæ, *V* tempus inter observationem primam & secundam, *W* tempus inter secundam ac tertiam, X longitudinem, quam cometa toto illo tempore eâ cum velocitate, quam habet in mediocri telluris à sole distantiâ, describere posset, quæque (per corol. 3. prop. XL. lib. III.) invenienda est, & *tV* perpendiculum in chordam *Tτ*. In observatâ longitudine mediâ *tB* sumatur utcunque punctum *B* pro loco cometæ in plano eclipticæ, & inde versus

142. (p) * *Si tales observationes*. (Ibid.).

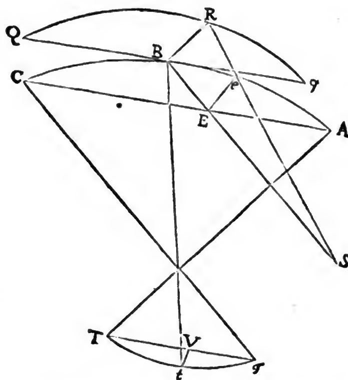
versus solem S ducatur linea BE, quæ sit ad sagittam tV, ut contentum sub SB & St *quad.* ad cubum hypotenusæ trianguli rectanguli, cujus latera sunt SB & (q) tangens latitudinis cometæ in observatione secundâ ad radium tB. Et per punctum E agatur (per hujus lem. VII.) recta AEC, cujus partes AE, EC, ad rectas TA & τC terminatæ, sint ad invicem ut tempora V & W: & (r) & erunt A & C loca cometæ in plano eclip-



(q) * *Et tangens latitudinis cometæ.* Ex puncto B, ad planum Eclipticæ erecta intelligatur normalis, hæc erit tangens latitudinis cometæ in secundâ observatione, sumpto t B pro radio.

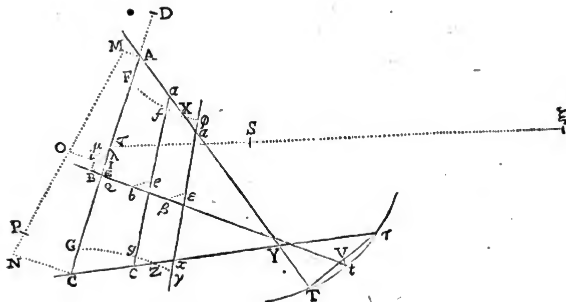
(r) * *Et erunt A & C loca cometæ.* Quoniam (ex hyp) B est vestigium cometæ in plano Eclipticæ, & BR ad planum Eclipticæ normaliter ducta, tangens latitudinis observatæ ex t ad radium t B, patet punctum R esse verum cometæ locum, atque R S distantiam cometæ à Sole in observatione secundâ. Per E, agatur E e, ad B R, parallela quæ (per prop. 8. lib. XI. elem.) normalis est ad planum Eclipticæ, jacetque in plano trianguli S B R, occurrat hæc ipsi S R in e. Jam verò recta R e, est ad rectam t V, in ratione compositâ ex R e, ad B E, & B E ad t V. Sed (per prop. 2 lib. 6. elem) R e est ad B E ut R S ad B S & B E est ad t V, ut $St^2 \times SB$ ad SR^3. Quare E e est ad t V, in ratione compositâ ex ratione S R ad B S, & ratione 142;

DE MUNDI SYSTEMATE. eclipticæ in observatione primâ ac tertiâ quamproximè, si modo *B* sit locus ejus rectè assumptus in observatione secundâ. Ad



142. tione $St^2 \times SB$ ad cubum rectæ SB; ratio autem quæ ex istis binis componitur eadem est cum ratione St^2 ad SR^2, hinc Re est ad BE, ut St^2 ad SB^2. Quia verò tV est æqualis quamproxime quadrato arcûs Tt per diametrum orbis magni diviso (157. lib. I.) erit recta tV, quamproxime spatium per quod terra è quiete demissa vi suæ gravitatis caderet versus Solem, dum semissem arcûs Tt, describet, si eâdem ubique gravitate acceleratrice uniformiter continuatâ urgeretur quâ urgetur in loco t, (202. lib. I.). Prætereà gravitas acceleratrix versus solem in loco t, est ad gravitatem acceleratricem versus eundem in loco R, ut SR^2 ad St^2, & spatia eodem tempore, urgentibus illis viribus deorsum versus Solem, descripta, sunt inter se ut vires (Lem. X. Lib. I.); Quare recta Re, est spatium per quod cometa è quiete ex R demissus versus Solem caderet semisse temporis quo Terra describit arcum Tt, hoc est, semisse temporis quo cometa describit trajectoriæ suæ arcum interceptum inter duas longitudines TA, TC, ideóque punctum R, est in arcûs istius chordâ. Undè si jam arcûs trajectoriæ QRq binis longitudinibus TA, TC terminati quam puncti e, concipiantur vestigia normalibus ad planum Eclipticæ demissis signata, nempè A, B, [illegible] & E, erit punctum E in chordâ arcûs ABC. Sed chorda arcûs ABC dividitur à rectâ SB ferè in ratione temporum quibus cometa ad Eclipticam reductus, describit arcus AB, BC, (165.) & (per constr.) in eâdem ratione dividitur recta AC, nullaque alia hisce conditionibus potest satisfacere. Cùm igitur oporteat chordam arcûs qui est

Ad AC bisectam in I erige perpendiculum Ii. Per punctum B age occultam Bi ipsi AC parallelam. Junge occultam Si secantem AC in λ, & comple parallelogrammum $iI\lambda\mu$. Cape $I\sigma$ æqualem $3I\lambda$, & per solem S age occultam $\sigma\xi$ æqualem



$3S\sigma + 3i\lambda$. Et deletis jam literis A, E, C, I, à puncto B versus punctum ξ duc occultam novam BE, quæ sit ad priorem BE in duplicata ratione distantiæ BS ad quantitatem $S\mu + \frac{1}{3}i\lambda$. Et per punctum E iterum duc rectam AEC eâdem lege ac prius, id est, ita ut ejus partes AE & EC sint ad invicem, ut tem-

est vestigium portionis trajectoriæ inter longitudines T A, T C interceptæ, à rectis T A, T C terminari & per E transire & in E dividi in ratione temporum, cumque recta A C hasce conditiones sola & unica obtineat, evidens est rectam A C esse chordam prædicti arcûs, ac proinde puncta A & C sunt quamproxime vestigia cometæ in plano Eclipticæ in observationibus primâ & tertiâ, si modò B, sit locus ejus rectè assumptus in observatione secundâ. 142.

tempora inter observationes *V* & *W*. Et erunt *A* & *C* loca cometæ (f) magis accuratè.

Ad

142. (f) * *Magis accuratè.* Quoniam (per constr. præced.) assumptus est locus B vero non satis proximus, & licet accurate sumptus fuisset, tamen loca A & C, inde deducta non sunt satis accurate definita, hinc adhiberi debet aliqua correctio. Manente constructione Newtonianâ, concipiantur demissa à singulis trajectoriæ cometicæ punctis perpendicula ad planum Eccliptica, prædictis perpendiculis in plano Eccliptica signabitur curva parabolica A B C, cujus umbilicus S. Hujus arcûs A B C, rectis T A, T C comprehensi chorda est quamproximè recta C A, quæ bifariam dividitur in I, (ex dem.). Jam verò in prædicto arcu sumptum est punctum B, non procul à vertice segmenti A B C, nam capta sunt tria observationum tempora æqualibus ferè intervallis ab invicem distantia, ita tamen ut tempus sit paulò majus ubi cometa tardiùs movetur. Præterea ducta est recta ad C A parallela concurrens in i cum normali erectâ à puncto I ad rectam C A, junctaque est secans Si, completumque parallelogrammum i I λ μ. Quia verò respectu immensæ Solis distantiæ, evanescit distantia punctorum I, μ; erit α ferè vertex segmenti A B C. Jungatur μ S, secans chordam A C in Y, erit μY, ferè parallela i λ, ob immensam puncti S distantiam, ideóque $\lambda\gamma$, æqualis rectæ i μ, ac proindè & ipsi i λ Sed (ex constr.) I σ sumpta est tripla ipsius i λ, quarè est etiam tripla ipsius $\lambda\gamma$ & reliquæ Yσ, ideóque juncta σS, (165) ea ipsa est recta σ S, quæ exhibetur in Lem, 8. id est, in rectâ σ S, productâ versus S, reperitur punctum ξ, à quo ducta quævis recta chordam A C arcumque C B A secans, chordam secat in segmenta quæ eandem habent rationem cum temporibus quibus respondentes arcus à cometâ describuntur. Sed (ex constr.) $\sigma\xi = 3S\sigma + 3\, i\lambda$ & $i\lambda = I\mu$, sunt enim rectæ i λ, I μ, diametri ejusdem parallelogrammi rectanguli, hinc $\sigma\xi = 3\,\sigma s + 3\, I\mu$. Quarè (140) punctum ξ, suprà inventum, illud est ex quo ducta utcumque recta dividit chordam C A in ratione temporum quibus binæ partes arcûs A C ab eadem rectâ productâ notatæ, à cometâ describuntur. Deletâ igitur, ad vitandam confusionem, priore B E versus S ductâ, acta est nova versus ξ, quæ est ad priorem ut quadratum ipsius S B, ad quadratum ipsius $S\mu + \frac{1}{3}\, i\lambda$, hoc est propter æquales i λ, I μ, ad quadratum ipsius $S\mu + \frac{1}{3} I\mu$, & S B est quamproximè æqualis ipsi S μ. Quarè nova B E, est ad priorem B E, ut $S\mu^2$, ad SN^2, positâ μ N triente ipsius I μ, sivè i λ, ut in constr. Lem. X. Deinde gravitas acceleratrix versus Solem in loco N, est ad gravitatem acceleratricem versus eundem in loco B, vel μ, ut SB^2 vel $S\mu^2$ ad SN^2. Præterea gravitates acceleratrices versus solem in distantiis diversis, manentibus dictis viribus, sunt ut spatia eodem tempore versus solem cadendo descripta; est igitur nova B E, ad priorem B E, ut spatium versus solem cadendo percursum, urgente vi acceleratrice quæ urget in loco N, semisse temporis quo cometa describit arcum longitudinibus T A, T C, comprehensum, ad spatium eodem tempore versus solem cadendo descriptum, urgente vi acceleratrice quæ urget in loco B. Sed æquales sunt hujus analogiæ consequentes, quare æquantur etiam antecedentes, ideóque nova recta B E æquatur spatio à grave cadente versus solem percurso, semisse temporis quo cometa arcum A B C, in Eccliptica describit, urgente vi acceleratrice uniformiter continuatâ quæ in distantiâ S N, à sole obtinet. At (Lem XI.) spatium per quod corpus decidit versus solem semisse temporis quo cometa describit arcum A B C, cum urgetur vi acceleratrice uniformiter continuatâ quæ in loco N obtinet

tinet

Ad *A C* bisectam in *I* erigantur perpendicula *A M*, *C N*, *I O*, quorum *A M* & *C N* sint tangentes latitudinum in observatione primâ ac tertiâ ad radios *T A* & *τ C*. Jungatur *M N* secans

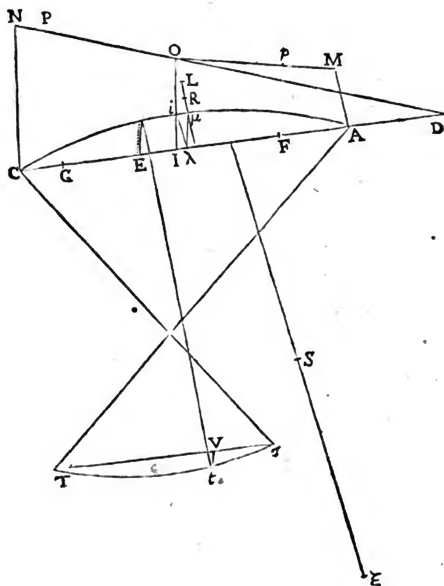
LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.

tinet, æquale est rectæ μ Y, segmento ipsius μ S, inter verticem μ & chordam A C intercepto, ac proinde æquatur quamproxime ipsi B E segmento rectæ B ξ, inter punctum B ipsi μ proximum & chordam A C comprehenso. Unde punctum E est in chordâ A C magis accurate quam anteà, hoc est, chorda arcûs qui est vestigium portionis trajectoriæ cometicæ in plano Eclipticæ, inter longitudines T A, T C interceptæ, per punctum E ultimò inventum transit quamproximè. Porrò chorda prædicta per E traducta inter T A, T C, ità locari debet ut A E, sit ad E C, sicut tempus quo cometa describit Eclipticæ arcum inter longitudines T A & τ B, ad tempus quo arcum inter τ B & T C describit (Lem. 8.) sed A C ità (per Lem. 8.) acta est per E, ut A E sit ad E C in eâdem illâ ratione, nempe sicut tempus inter observationem primam & secundam ad tempus inter observationem secundam & tertiam. Rectè igitur acta est A C, per E scilicet transiens & divisa in E ut oportebat, ac proinde si modò punctum B, rectè fuerit assumptum pro cometæ vestigio in observatione secundâ, puncta A, C sunt ejusdem vestigia quamproximè in observationibus primâ & tertiâ.

cans IO in O. Constituatur rectangulum $iI\lambda\mu$ ut prius. In IA productâ capiatur ID æqualis $S\mu + \frac{2}{3} i\lambda$. Deinde in MN versus N capiatur MP, quæ sit ad longitudinem supra inventam X, in subduplicatâ ratione mediocris distantiæ telluris à sole (seu semidiametri orbis magni) ad distantiam OD. Si punctum P incidat in punctum N, (t) erunt A, B, C tria loca cometæ,

142. (t) * *Erunt A, B, C.* Superest jam ut dignoscatur an punctum B in mediâ longitudine recte fuerit assumptum cometæ vestigium, ut error hinc ortus, si quis fuerit, corrigatur, reliquis quæ hactenus facta sunt manentibus. Deleto priore parallelogrammo $iI\lambda\mu$, ad priorem minusque accuratam chordam C A constituto, describatur alterum ad posteriorem & accuratiorem chordam C A, eâdem adhibitâ constructione ut priùs. Ex punctis A, I, C, erigantur ad C A normales A M, I O, C N, sitque A M tangens notæ latitudinis in observatione primâ ad radium T A, & C N tangens latitudinis in observatione tertiâ ad radium T C; jungatur M N secans I O in O. Si erigatur trapezium A C N M normaliter ad planum Eclipticæ manente rectâ C A, erunt puncta M, N loca vera cometæ, si modò punctum B sit ejus vestigium in plano Eclipticæ in observatione secundâ, & planum transiens per tria puncta M, O, N, est planum trajectoriæ cometicæ, ideoque recta M N est chorda arcus trajectoriæ parabolicæ à cometâ descriptæ inter observationem primam & tertiam, & S M, S N sunt distantiæ cometæ à sole in observatione primâ & tertiâ respectivè, hoc est, distantia vera cujusvis puncti trajectoriæ cometicæ à Sole est hypothenusa trianguli rectanguli cujus alterum latus est distantia á sole vestigii illius puncti in plano Eclipticæ, alterum autem est perpendiculum ex isto vestigio normaliter ad planum Eclipticæ excitatum & ad punctum trajectoriæ terminatum. Quia verò aliqua ex illis perpendiculis sunt longiora ut N C, quædam breviora ut M A, inter hæc medium quoddam usurpetur, putà hic I O. Et universaliter loquendo, distantia cujusvis puncti trajectoriæ cometicæ à sole erit quamproximè hypothenusa trianguli rectanguli cujus alterum latus est distantia puncti analogi in vestigio trajectoriæ descripto & alterum latus est ipsa recta I O. Quibus positis in I A, eâve productâ capiatur $ID = S\mu + \frac{2}{3} i\lambda = SR$, factâ $LR = L\mu$, & jungatur D O, hæc quamproximè æquabitur puncti trajectoriæ cujus μ est vestigium distantiæ à sole auctæ duabus tertiis rectæ interjectæ inter punctum illud & chordam arcûs trajectoriæ, ipsam scilicet M N in trapezio A C N M, id est, recta D O æqualis est rectæ in plano trajectoriæ cometæ analogæ ipsi S R in ejus vestigio in plano Eclipticæ, hoc est D O æqualis est rectæ S R in parabolâ (Lem. X.). Jam (per cor. 3 prop. 40.) conferatur velocitas cometæ, dum in parabolicâ suâ trajectoriâ movetur in distantiâ à sole æquali rectæ D O, cum velocitate telluris circà solem, & definiatur linea quam cometa, cum prædictâ velocitate æquabiliter motus, percurreret toto tempore quo tellus arcum $\tau\, t\, T$ describit, sivè toto tempore quo cometa arcum ABC in Eclipticâ percurrit, in partibus arcûs $T\, t\, \tau$ à tellure interim percursi. Id autem facile præstatur modo sequenti. Calculo inveniatur longitudo arcûs $\tau\, t\, T$ à tellure descripti inter observationem primam & tertiam, posito quovis numero rotundo pro mediocri distantiâ terræ à sole, longitudo putà M P quæ est ad longitudinem priùs inventam X, in subduplicatâ ratione diametri orbis magni ad rectam notam D O, quæque proinde datur, est ipsa longitudo quæsita, ea nempe quam, cometa æquabiliter latus cum velocitate quam trajectoriam suam parabolicam describens habet ad distantiam à sole æqualem rectæ D O, percurreret tem-

LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.



tempore quo cometa arcum cujus chorda MN reverà percurrit. Nam (per cor. 3. prop. 40.) velocitas cometæ in hâc distantiâ DO, est ad velocitatem telluris in prædictâ ratione. Sed (per Lem. X.) dicta longitudo MP æqualis est chordæ arcûs quem cometa illo tempore reverà describit; Quarè si reperiatur MP æqualis chordæ MN, hoc est, si punctum P incidat in punctum N rectè assumptum fuit punctum B in longitudine secundò observatâ pro vestigio cometæ, ideóque erunt A, B, C, tria loca cometæ per quæ orbis ejus in plano Eclipticæ describi debet. 142.

De Mundi Systemate. tæ, per quæ orbis ejus in plano eclipticæ describi debet. (u) Sin punctum *P* non incidat in punctum *N*; in rectâ *AC* capiatur *CG* ipsi *NP* æqualis, ita ut puncta *G* & *P* ad easdem partes rectæ *NC* jaceant. Ex-

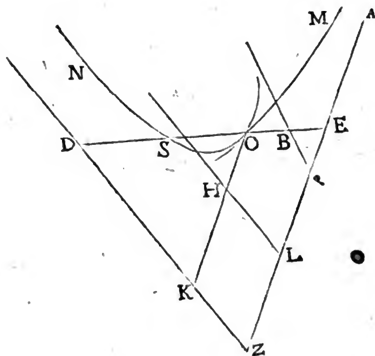
142. (u) * *Sin punctum P*, non incidat in punctum N, in rectâ M N eâve productâ, si opus est, (vid. fig. præced) capiantur M P, N P æquales longitudini prius inventæ, capiantur etiam C G, C F, æquales M P, N P, ità ut G & P ad easdem partes rectæ N C jaceant. Præterea eâdem methodo quâ ex assumpto puncto B, inventa sunt puncta E, A, C, G, ex assumptis aliis punctis b & β, inveniantur nova puncta e, a, c, g, & ε, α, κ, γ. Quod si longitudo prius inventa M P, minor fuerit quam M N, aut A G, vel C F, punctum b, sumendum erit propius puncto Y, in quo C τ & A T concurrunt, & ità porrò, ità ut saltem $\kappa\gamma$, minor fiat quam $\alpha\kappa$. Per puncta G, g, γ, describatur circulus qui rectam τ C, secabit inter G & κ, putà in Z, si puncta nova b, β, sumpta fuerint, ut jam diximus. Similiter per puncta F, f, φ, describatur circulus rectam T A, intersecans in X, erunt puncta Z, X, loca cometæ ad Eclipticam reducta, sive cometæ vestigia in observatione primâ & tertiâ, si B sit ejusdem vestigium in observatione secundâ. Idem similiter obtinet in a, c, & b, item in α, κ & β. Jam verò demonstratum est locum B, esse vestigium cometæ in observa-

Eadem methodo, quâ puncta E, A, C, G, ex assumpto puncto B inventa sunt, inveniuntur ex assumptis utcunque punctis aliis b & β puncta nova e, a, c, g & ε, α, κ, γ. Deinde si per G, g, γ ducatur circumferentia circuli $Gg\gamma$, secans rectam τC in Z: erit Z locus cometæ in plano eclipticæ. Et si in

servatione secundâ, si puncta N, P, coincidant, itemque A & F; quare si reliquis manentibus, coincidant puncta C, G, erit C, vestigium cometæ in observatione tertiâ. Similiter coincidentibus punctis A, F, erit A, vestigium cometæ in observatione primâ. Ut autem puncta illa coinciderent, traductus est circulus transiens per tria puncta G, g, γ, rectam τ C, secans in Z. Cùm igitur punctum Z, sit tam in loco punctorum C, nempe rectâ τ C, quam in loco punctorum G, nempe circulo, quandò punctum C reperitur in Z, punctum G in illo etiam reperietur, id est, in isto casu coincident puncta C, G, ideóque punctum Z est verum cometæ vestigium in plano Ecclipticæ in observatione tertiâ, huic enim conveniunt omnes conditiones requisitæ. Similiter ob easdem rationes, punctum X est verum cometæ vestigium in observatione primâ. Quare si ex puncto Z, ad planum Ecclipticæ excitata intelligatur normalis Z R 142.
æqualis tangenti latitudinis notæ in observatione tertiâ ad radium τ Z, erit R locus verus cometæ in orbe proprio. Similiter ad planum Ecclipticæ erigatur perpendicularis X Y, æqualis tangenti latitudinis in observatione primâ ad radium T X, punctum Y, erit alter cometæ locus in orbe proprio. Quarè (per prop. 19. lib. 1.) umbilico S, per loca bina R, r, describatur parabola, hæc erit trajectoria cometæ. Quia verò parabolæ per puncta R, r, & umbilico S, descriptæ duplex positio esse potest (ut patet ex constr. prop. 19. lib. 1.) ex eodem umbilico S, & binis punctis R, r, duæ describi poterunt parabolæ; utra autem pro orbe cometæ sumenda sit ex aliâ quâvis cometæ observatione manifestum erit. Nam locus cometæ qui ex alterâ harum parabolarum colligetur, cum observato loco conveniet, locus autem ex alterâ parabolâ deductus nequaquam observationibus congruet.

De Mundi Systemate. AC, $a\epsilon$, $\alpha\kappa$ capiantur AF, af, $\alpha\phi$ ipsis CG, cg, $\kappa\gamma$ respectivè æquales, & per puncta F, f, ϕ ducatur circumferentia circuli $Ff\phi$, secans rectam AT in X; erit punctum X alius cometæ locus in plano eclipticæ. Ad puncta X & Z erigantur tangentes latitudinum cometæ ad radios TX & τZ; & habebuntur loca duo cometæ in orbe proprio. Denique (per prop. XIX. lib. I.) umbilico S, per loca illa duo describatur parabola, & hæc erit trajectoria cometæ. *Q. E. I.*

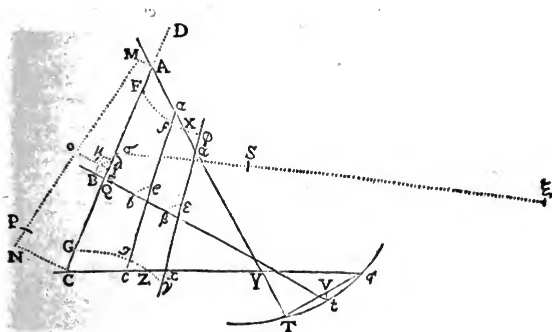
(x) Constructionis hujus demonstratio ex lemmatibus consequitur: quippe cum recta AC secetur in E in ratione temporum,



143. (x) * *Constructionis hujus demonstratio.* Patet ex notis præced.

§ 143. Lemma. Sit angulus rectilineus A Q B datumque punctum S; item sit curva M O N, talis ut per S ductâ quâvis rectâ SE sit BE, anguli lateribus intercepta, æqualis rectæ SO, erit curva MON, hyperbola. Nam ducatur SL, ad BQ, parallela, occurrensque ipsi AQ in L, in rectâ QL productâ capiatur $LZ = LQ$, agaturque ZD ad QB parallela, itemque ducatur OK parallela ad QZ: ob $SO = BE$ (per hyp.) erit $HO = QE$. Quare cum sit $SH : HO = SL : LE = SL - SH : LE - HO = LH : LQ = LH : HK$, erit $SH \times HK = HO \times LH$, hoc est, SL

rum, per lemma VII, ut oportet per lem. VIII: & BE per lem XI. sit pars rectæ BS vel $B\xi$ in plano eclipticæ arcui ABC & chordæ AEC interjecta; & MP (per corol. lem. X.) longitudo sit chordæ arcus, quem cometa in orbe proprio inter observationem primam ac tertiam describere debet, ideoque ipsi MN æqualis fuerit, si modo B sit verus cometæ locus in plano eclipticæ.



Cæterum puncta B, b, β non quælibet, sed vero proxima eli-

$SL \times HK - LH \times HK = KO \times LH - HK \times LH$. Unde erit $SL \times HK = KO \times LH$, vel $ZL \times LS = ZK \times KO$, ideóque curva MON, est hyperbola cujus asymptoti ZA, ZS (Lem. 1. de con.).

144 144. Corol. Hinc per datum punctum S recta linea duci potest ita ut pars rectæ BE, lateribus anguli dati EQB, intercepta, æqualis sit rectæ datæ. Nam descripta hyperbola MON, centro S, intervallo datam rectam æquante, describatur circulus hyperbolam intersecans in O, & producatur SOE, erit BE, æqualis rectæ datæ SO (143).

(y) eligere convenit. Si angulus AQt, in quo vestigium orbis in plano eclipticæ descriptum secat rectam tB, præter propter innotescat; in angulo illo ducenda erit recta occulta AC, quæ

145. 145. Newtonus in arithmeticâ universali præcedentis corollarii constructionem quæ fit per conchoidem more veterum, anteponendam esse ait constructioni quæ Sectiones Conicas adhibet. Quarè veterum constructionem utpoté simpliciorem hic quoquè subjungemus. Sic autem describitur conchois. Agatur nempè recta QB, ad quam erigatur normalis AH, deindè ex puncto C, tanquam polo ità ducantur rectæ quotcumque CM, rectam QB secantes in E, ut semper sit EM, æqualis rectæ datæ AE, curva in quâ sunt puncta M, A dicitur conchois. Jam verò inter latera anguli GQB, ducere oporteat rectam GK, quæ transeat per punctum datum C, & æqualis sit rectæ datæ CK, puncto C tanquam polo & intervallo dato AH = CK describatur conchois quæ occurrat rectæ CG, in G patet fore KG, æqualem rectæ datæ CK. Q. E. F.

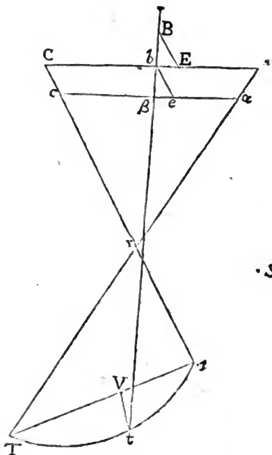
(y) * *Eligere convenit.* Si præter propter innotescat angulus quem vestigium orbitæ cometicæ continet cum rectâ terram & cometam in observatione secundâ conjun-

quæ sit ad $\frac{4}{3} T\tau$ in subduplicatâ ratione SQ ad St. Et agendo rectam SEB, cujus pars EB æquetur longitudini Vt, determinabi-

145. jungente, sive huic æqualis angulus A Q t (Lem. 4. de con.) quem chorda A C continet cum rectâ t B, id quod præstari poterit per num. 133. tunc punctum B, primò assumendum hoc modo determinabitur. Ducatur recta A C, rectis positione datis T A, T C utrinque comprehensa, rectamque t B, positione datam, in angulo æquali dato in Q intersecans quæ sit ad $\sqrt{2} \times Tt$, hoc est, proxime ad $\frac{4}{3}$ Tt, in subduplicatâ ratione St ad SQ, & agatur per S, recta S E B, tali ut pars E B à cruribus anguli A Q B intercepta, æqualis sit rectæ t V (144. 145.) punctum B, ità definitum, est illud ipsum quod commodè primâ vice usurpari poterit pro vestigio cometæ in plano Eclipticæ. Ponatur B, esse vestigium cometæ in plano Eclipticæ & arcum parabolicum per A, C, B transeuntem esse vestigium arcûs trajectoriæ inter observationem primam & tertiam descripti. Jam verò in hypothesi quod gravitas acceleratrix versùs solem eâdem sit in distantiâ telluris à sole, atquè in distantiâ cometæ ab eodem, quæ est hypothesis Galilæi de gravitate à verâ non multum distans, æquales erunt B E, t V, ut pote spatia cadendo versùs solem eodem tempore percursa à cometâ & à tellure, ac proindè erit A C chorda parabolæ ad $\sqrt{2} \times Tt$ chordam circuli cujus centrum cum umbilico parabolæ coincidit in subduplicatâ ratione rectæ St, ad rectam S E, (Cor. 7. prop. 16. lib. 1). Sed sumpta est A C ad $\sqrt{2} \times Tt$ in subduplicatâ ratione St ad SQ, & A C secat rectam t B in angulo A Q t, sicut oportebat, atque B E æqualis est ipsi t V; Quare recta A C obtinet quamproximè omnes conditiones requisitas ut sit chorda arcûs qui est vestigium trajectoriæ cometicæ inter longitudinem primam T A, & tertiam interceptæ ac proinde punctum B, habet omnes conditiones ut sit proxime vestigium cometæ in observatione secundâ. Recte igitur determinatum est punctum B, quod primâ vice usurpare licet.

nabitur punctum *B* quod prima vice usurpare licet. (z) Tum rectâ *AC* deletâ & secundùm præcedentem constructionem iterum ductâ, & inventâ insuper longitudine *MP*; in *tB* capiatur punctum *b*, e lege, ut si *TA*, *τC* se mutuò secuerint in *Y*, sit distantia *Yb* ad distantiam *YB*, in ratione compositâ ex ratione *MP* ad *MN* & ratione subduplicatâ *SB* ad *Sb*. Et eâdem methodo inveniendum erit punctum tertium *β* si modo

145. (z) * *Tum rectâ AC, deletâ.* Determinato puncto B, quod primâ vice licet usurpare, cætera quæ deinceps assumuntur puncta nempè b, β, aliam constructionem postulant. Nec satis est quod punctum b, sumatur propius puncto Y, dum linea MP, minor est quam AC vel MN (in fig. Newt.) & contrà. Sed quia ducere oportet rectam AC, quæ sit æqualis longitudini MP, capiatur in tB, punctum b, eâ lege ut sit distantia Yb, ad distantiam YB, in ratione compositâ ex ratione MP ad AC, & ratione subduplicatâ SB ad Sb. Ex hactenus dictis patet cur prior ratio componens adhibeatur; cum enim invenienda sit AC, quæ sit longitudini MP æqualis, si illa hâc sit major aut minor, minuenda erit vel augenda donec æquales fiant, æquarentur autem per solam priorem rationem si MP foret constans. Quia verò variante AC, perpetuò quoque variabilis est recta MP, ideò adhibenda est altera ratio. Jam in parabolis per puncta A, B, C, & a, b, c, descriptis, chordæ arcuum ABC, abc, in quibus æquales sunt rectæ BE, be, ad umbilicum S tendentes inter verticem & chordam interceptæ, sunt in ratione subduplicatâ rectarum SB, Sb (ut colligitur ex theor. 1. & 2. de parab.). Prætereà (ex dem.) æquales sunt rectæ BE, be quamproximè; sunt enim spatia à cometâ versus solem cadendo in diversis ab illo distantiis eodem tempore percursa, & vestigium cometæ in observatione secundâ proximum est vertici arcûs ABC, seu vestigii portionis trajectoriæ à cometâ inter observationem primam & tertiam descriptæ. Quarè habetur punctum b, co-



metæ

dò operationem tertiò repetere lubet. Sed hâc methodo operationes duæ ut plurimum suffecerint. Nam si distantia *B b* perexigua obvenerit; postquam inventa sunt puncta *F*, *f* & *G*, *g*, actæ rectæ *Ff* & *Gg* secabunt *TA* & *τ C* in (*) punctis quæsitis *X* & *Z*.

Exem-

metæ vestigium in plano Ecclipticæ, non tamen accuratum, sed verò proximum duntaxat.

(*) * *In punctis quæsitis X & Z.* (Ut patet ex notâ u, in hanc prop.).

146. Si elliptica cometæ orbita magis accuratè observationibus satisfacere deprehendatur, ea sic poterit describi. Reperiatur vestigium cometæ in plano Eccliptica in observatione secundâ, eundem ordinem situmque obtinet vestigium illud inter puncta B, b, β, quem punctum Z, inter C, c, κ, vel X, inter A, a, α. Ex vestigio 146.
sic invento, ad planum Eccliptica erigatur normalis quæ est tangens latitudinis in observatione secundâ ad radium æqualem distantiæ inter locum t, dictumque vestigium. Hujus perpendiculi extremum punctum signabit locum cometæ in orbitâ propriâ secundò observatum. Denique umbilico S, per puncta X, Z, & punctum modò inventum describatur ellipsis (prop. 20. lib. 1.), hæc erit quæsita cometæ trajectoria.

De Mundi Systemate.

147. 147. Ex præcedentis problematis solutione colligi possunt positio lineæ nodorum trajectoriæ & tempus quo cometa nodos tenet. Iisdem manentibus, & per easdem litteras designatis ut suprà, producantur rectæ Z X, R r, donec concurrant in ☊, junganturque S Z, S X, S ☊. Jam vero (ex præced.) data sunt omnia puncta S, Z, X, ideóque trianguli S Z X, tam latera quam anguli ac proinde innotescit etiam angulus S X ☊. Ex loco r, ducatur r O, ad Z X parallela rectæ R Z, occurrens in O, erunt triangula R O r & & r X ☊, æquiangula, ideóque cum ex notis lateribus O r = Z X, & O R, differentiâ notarum rectarum R Z & r X unà cum angulo recto R O r, innotescant reliqua latera & anguli, dabuntur quoque anguli trianguli r X ☊. Sed datur in hoc triangulo latus unum X r, dabuntur ergò & reliqua nempè X ☊ & r ☊. Deindè in triangulo ☊ X S, nota sunt latera X S, X ☊, cum angulo intercepto S X ☊, innotescet itaque angulus X S ☊ Sed datur (per observ.) positio rectæ S X, sivè angulus quem facit cum T X. Nam in triangulo X T S, dantur latera T S, T X & angulus X T S, distantia inter locum solis cognitum locumque cometæ primò observatum. Unde innotescit T X S, ac proinde & positio rectæ ☊ S ☋, hoc est, dabuntur loca nodorum è sole visa. Quod si æquales fuerint rectæ Z R, X r, nodorum linea parallela est rectæ Z X, ideóque positione cognita.

Ad determinandum tempus quo cometa in nodo versatur, sit R r, trajectoria cometæ (per prop. præced.) descripta, sitque superius inventa nodorum linea ☊ S ☋, trajectoriæ in ☊ & ☊ occurrens, erit (prop. 1. lib. 1.) intervallum temporis inter observationem primam & momentum quo cometa ad nodum ☊ appellit, ad intervallum temporis inter observationem primam & tertiam ut area r ☊ S, ad aream R S r; sed arearum r ☊ S, R S r, nota est ratio (per theor. 4. de parab. vel num. 141.) notum igitur est tempus quo cometa nodum ☊, tenet. Pari modo innotescit tempus quo cometa ad nodum alterum ☋ appellit.

148. Iisdem manentibus, determinabitur inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eccliptica. Ex puncto O ad ♈ S ♌, nodorum lineam erigatur perpendicularis O ♈, jungaturque R ♈. In triangulo O S ♈, præter rectum ad ♈, dantur (147.) angulus O S ♈ & latus O S, quare datur O ♈. Deinde in triangulo R O ♈, dantur latera circà rectum O R & O ♈, ideóque notus erit angulus O ♈ R, qui est inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eccliptica. 148.

149. Facilè obtineri potest tempus quo cometa perihelium tenet. Umbilico S, per puncta R, r, describatur trajectoria cometæ. Centro S, per alterutrum punctorum puta R, describatur circulus trajectoriæ denuò occurrens in V, jungaturque R V, ad quam ex puncto S demittatur perpendicularis S φ, quæ producatur donec parabolæ occurrat in π, erit π trajectoriæ perihelium; & proinde recta ipsius S π quadrupla, erit ejusdem latus rectum principale. Cum enim umbilicus S, in parabolæ axe reperiatur, circulus centro S descriptus, parabolam intersecabit in duobus punctis ab axe æqualiter distantibus ac proinde axi normalis erit R V intersectiones conjungens; Quare S φ est axis & π vertex parabolæ, sive trajectoriæ perihelium & quadrupla S π parameter diametri cujus π est vertex (theor. 2. de parab.) hoc est, latus rectum principale. Jam capiatur tempus cujus intervallum ab observatione primâ, dum cometa versabatur in r, est ad intervallum temporis inter observationem primam & tertiam ut area r S π ad aream R r S, habebitur illud ipsum tempus quo cometa perihelium occupat.

150. Hinc etiam cometæ perigæum ejusque tempus determinabitur. Cum enim detur tempus inter observationem primam & tertiam interceptum, quo scilicet data area r R S, à cometa radio ad solem ducto describitur, data quoque erit area uno die similiter descripta. Prætetea datur r, locus cometæ in observatione primâ, quare dabuntur loca cometæ in proprio orbe ad dies singulos. Sed dantur loca telluris in orbitâ suâ, notusque est situs mutuus inter telluris orbitam & cometæ trajectoriam. Unde innotescet tempus quo cometa est terræ proximus, hoc est, tempus quo cometa in perigæo versatur.

Exem-

Exemplum.

Proponatur cometa anni 1680. Hujus motum à *Flamstedio* obſervatum & ex obſervationibus computatum, atque ab *Halleio* ex iiſdem obſervationibus correctum, tabula ſequens exhibet.

	Tem. appar.	Tem. verum	Long. Solis.	Cometæ Longitudo.	Cometæ Lat. bor.
	h. ′	h. ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
1680. *Dec.* 12	4 . 46	4 . 46 . 0	♑ 1.51.23	♑ 6.32.30	8.28. 0
21	6 . 32½	6 . 36 . 59	11. 6.44	♒ 5. 8.12	21.42.13
24	6 . 12	6 . 17 . 52	14. 9.26	18.49.23	25.23. 5
26	5 . 14	5 . 20 . 44	16. 9.22	28.24.13	27. 0.52
29	7 . 55	8 . 3 . 2	19.19.43	♓ 13.10.41	28. 9.58
30	8 . 2	8 . 10 . 26	20.21. 9	17.38.20	28.11.53
1681. *Jan.* 5	5 . 51	6 . 1 . 38	26.22.18	♈ 8.48.53	26.15. 7
9	6 . 49	7 . 0 . 53	♒ 0.29. 2	18.44. 4	24.11.56
10	5 . 54	6 . 6 . 10	1.27.43	20.40.50	23.43.52
13	6 . 56	7 . 8 . 55	4.33.20	25.59.48	22.17.28
25	7 . 44	7 . 58 . 42	16.45.36	♉ 9.35. 0	17.56.30
30	8 . 7	8 . 21 . 53	21.49.58	13.19.51	16.42.18
Feb. 2	6 . 20	6 . 34 . 51	24.46.59	15.13.53	16. 4. 1
5	6 . 50	7 . 4 . 41	27.49.51	16.59. 6	15.27. 3

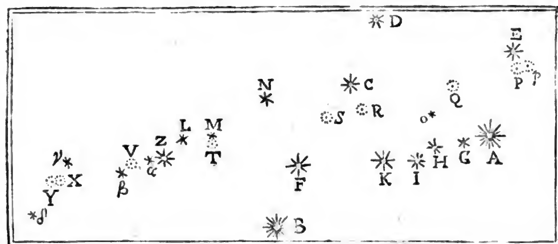
His adde obſervationes quaſdam è noſtris.

	Tem. appar.	Cometæ Longitudo	Cometæ Lat. bor.
1681. *Feb.* 25	8h. . 30′	♉ 26°. 18′. 35″	12°. 46′. 46″
27	8 . 15	27 . 4 . 30	12 . 36 . 12
Mar. 1	11 . 0	27 . 52 . 42	12 . 23 . 40
2	8 . 0	28 . 12 . 48	12 . 19 . 38
5	11 . 30	29 . 18 . 0	12 . 3 . 16
7	9 . 30	♊ 0 . 4 . 0	11 . 57 . 0
9	8 . 30	0 . 43 . 4	11 . 45 . 52

Hæ obſervationes teleſcopio ſeptupedali, & micrometro filiſque in foco teleſcopii locatis peractæ ſunt: quibus inſtrumentis

tis & positiones fixarum inter se & positiones cometæ ad fixas determinavimus. Designet A stellam quartæ magnitudinis in sinistro calcaneo Persei (*Bayero* ι) B stellam sequentem tertiæ magnitudinis in sinistro pede (*Bayero* ζ) & C stellam sextæ magnitudinis (*Bayero* η) in talo ejusdem pedis, ac D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, Z, α, β, γ, δ stellas alias minores in eodem pede.

LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROB. XXI.



Sintque p, P, Q, R, S, T, V, X, loca cometæ in observationibus supra descriptis: & existente distantiâ AB partium $80\frac{7}{12}$, erat AC partium $52\frac{1}{4}$, BC $58\frac{5}{6}$, AD $57\frac{5}{12}$, BD $82\frac{6}{11}$ CD $23\frac{2}{3}$, AE $29\frac{4}{7}$, CE $57\frac{1}{2}$, DE $49\frac{11}{12}$, AI $27\frac{7}{12}$, BI $52\frac{1}{6}$, CI $36\frac{7}{12}$, DI $53\frac{5}{11}$ AK $38\frac{2}{3}$ BK 43, CK $31\frac{5}{9}$, FK 29, FB 23, FC $36\frac{1}{4}$, AH $18\frac{6}{7}$, DH $50\frac{7}{8}$, BN $46\frac{5}{12}$, CN $31\frac{1}{3}$, BL $45\frac{5}{12}$, NL $31\frac{5}{7}$. HO erat ad HI ut 7 ad 6 & producta transibat inter stellas D & E, sic ut distantia stellæ D ab hâc rectâ esset $\frac{1}{6}$ CD. LM erat ad LN ut 2 ad 9, & producta transibat per stellam H. His determinabantur positiones fixarum inter se.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Tandem *Poundius* noster iterum obſervavit poſitiones harum fixarum inter ſe, & earum longitudines & latitudines in tabulam ſequentem retulit.

Fixarum	Longitudines. ° ′ ″	Lat. boreæ. ° ′ ″
A	♉ 26.41.50	12. 8.36
B	28.40.23	11.17.54
C	27.58.30	12.40.25
E	26.27.17	12.52. 7
F	28.28.37	11.52.22
G	26.56. 8	12. 4.58
H	27.11.45	12. 2. 1
I	27.25. 2	11.53.11
K	27.42. 7	11.53.26

Fixarum	Longitudines. ° ′ ″	Lat. boreæ. ° ′ ″
L	♉ 29.33.34	12. 7.48
M	29.18.54	12. 7.20
N	28.48.29	12.31. 9
Z	29.44.48	11.57.13
α	29.52. 3	11.55.48
β	♊ 0. 8.23	11.48.56
γ	0.40.10	11.55.18
δ	1. 3.20	11.30.42

Poſitiones vero cometæ ad has fixas obſervabam ut ſequitur.

Die veneris *Feb.* 25. ſt. vet. hor. $8\frac{1}{2}$ p. m. cometæ in p exiſtentis diſtantia à ſtellâ E erat minor quam $\frac{3}{13}$ AE, major quam $\frac{1}{5}$ AE, ideoque æqualis $\frac{3}{14}$ AE proxime: & angulus ApE nonnihil obtuſus erat, ſed ferè rectus. Nempe ſi demitteretur ad pE perpendiculum ab A, diſtantia cometæ à perpendiculo illo erat $\frac{1}{5}$ pE.

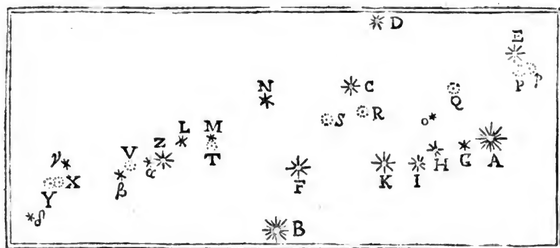
Eâdem nocte horâ $9\frac{1}{2}$, cometæ in P exiſtentis diſtantia à ſtellâ E erat major quam $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ AE, minor quam $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ AE, ideoque æqualis $\frac{1}{4\frac{7}{8}}$ AE, ſeu $\frac{8}{39}$ AE quamproximè. A perpendiculo autem à ſtellâ A ad rectam PE demiſſo diſtantia cometæ erat $\frac{4}{5}$ PE.

Die ſolis *Feb.* 27. hor. $8\frac{1}{4}$ p. m. cometæ in Q exiſtentis diſtantia à ſtellâ O æquabat diſtantiam ſtellarum O & H, & recta QO producta tranſibat inter ſtellas K & B. Poſitionem hujus rectæ ob nubes intervenientes magis accuratè definire non potui.

Die martis *Mart.* 1. hor. 11. p. m. cometa in R exiſtens, ſtellis

stellis K & C accuratè interjacebat, & rectæ CRK pars CR paulo major erat quam $\frac{1}{3}CK$, & paulo minor quam $\frac{1}{3}CK+\frac{1}{8}CR$, ideoque æqualis $\frac{1}{3}CK+\frac{1}{16}CR$ seu $\frac{16}{45}CK$.

Die mercurii *Mart.* 2. hor. 8. p. m. cometæ existentis in S distantia à stellâ C erat $\frac{4}{9}FC$ quamproximè. Distantia stellæ F à rectâ CS producta erat $\frac{1}{24}FC$; & distantia stellæ B ab eâdem rectâ, erat quintuplo major quam distantia stellæ F. Item recta NS producta transibat inter stellas H & I, quintuplo vel sextuplo propior existens stellæ H quam stellæ I.



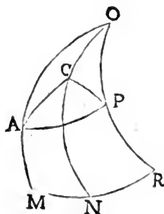
Die saturni *Mart.* 5. hor. $11\frac{1}{2}$. p. m. cometâ existente in T, recta MT æqualis erat $\frac{1}{2}ML$, & recta LT producta transibat inter B & F, quadruplo vel quintuplo propior F quam B, auferens à BF quintam vel sextam ejus partem versus F. Et MT producta transibat extra spatium BF ad partes stellæ B, quadruplo propior existens stellæ B quam stellæ F. Erat M stella perexigua quæ per telescopium videri vix potuit, & L stella major quasi magnitudinis octavæ.

Die lunæ *Mart.* 7 hor $9\frac{1}{2}$ p. m. cometæ existente in V, recta $V\alpha$ producta transibat inter B & F, auferens à BF versus F $\frac{1}{10}BF$, & erat ad rectam $V\beta$ ut 5 ad 4. Et distantia cometæ à rectâ $\alpha\beta$ erat $\frac{1}{2}V\beta$.

Die mercurii *Mart.* 9. hora $8\frac{1}{2}$ p. m. cometa existente in *X*, recta γ *X* æqualis erat $\frac{1}{4}\gamma\delta$, & perpendiculum demissum à stellà δ ad rectam γ *X* erat $\frac{2}{5}\gamma\delta$.

Eâdem nocte horâ 12, cometa existente in *Y*, recta γ *Y* æqualis erat $\frac{1}{3}\gamma\delta$, aut paulo minor, puta $\frac{5}{16}\gamma\delta$, & perpendiculum demissum à stellà δ ad rectam γ *Y* æqualis erat $\frac{1}{6}\gamma\delta$ vel $\frac{1}{7}\gamma\delta$ circiter. Sed cometa ob viciniam horizontis cerni vix potuit, nec locus ejus tam distinctè ac in præcedentibus definiri.

Ex hujusmodi observationibus per constructiones figurarum & computationes derivabam (a) longitudines & latitudines cometæ, & *Poundius* noster ex correctis fixarum locis loca cometæ correxit, & loca correcta habentur supra. Micrometro parùm affa-



149. (a) 149. * *Longitudines & latitudines.* Si observentur distantiæ cometæ à duabus fixis quarum longitudines & latitudines notæ sunt, invenientur cometæ longitudo & latitudo ad tempus observationis. Referat MR, portionem Eccliptica cujus polus O, sint A, P duæ stellæ quarum longitudines & latitudines datæ sunt, sitque C cometa cujus distantia à duabus stellis A, P nota sit. In triangulo AOP, ex datis A O, P O complementis latitudinum stellarum & angulo A O P cujus mensura est arcus M K differentia longitudinum, dabitur A P distantia stellarum, atque innotescet angulus O P A. Jam verò in triangulo A C P dantur omnia latera, unde invenietur angulus C P A, quo subtracto ex angulo O P A relinquetur angulus O P C. Quare dabitur angulus P O C cujus mensura est arcus N K differentia scilicet longitudinum stellæ P & cometæ C. Item innotescet arcus OC, qui est complementum latitudinis cometæ. Eâdem prorsus ratione, si observentur distantiæ cometæ à duabus fixis quarum ascensiones rectæ & declinationes notæ sunt, inde colligentur ascensio recta & declinatio cometæ.

150. Datis declinatione & ascensione rectâ alicujus stellæ fixæ, inveniri possunt declinatio & ascensio recta cometæ, modò tamen stella & cometa transire vicissim possint per campum telescopii immoti aut alio quocumque modo obtineatur differentia declinationis & ascensionis rectæ inter fixam & cometam (39 lib. 3.) & hinc dabuntur cometæ longitudo & latitudo (17. lib. 3.)

151. Datis cometæ longitudine & latitudine, simulque notâ longitudine solis, datur distantia cometæ à sole. Sit enim E L portio Eccliptica, Sol in S, latitudo

affabrè constructo usus sum, sed longitudinum tamen & latitudinum errores (quâtenus ex observationibus nostris oriantur) minutum unum primum vix superant. Cometa autem (juxta observationes nostras) in fine motus sui notabiliter deflectere cœpit boream versus, à parallelo quem in fine mensis *Februarii* tenuerat.

Jam

do cometæ C I; in triangulo C I S, ad I rectangulo (7. lib. 3.) datur latus C I, itemque notum est latus I S differentia longitudinum solis & cometæ, ideoque innotescit distantia cometæ à sole C S.

152. Si duobus diebus sese invicem immediatè subsequentibus observentur longitudines H, I & latitudines C H, K I cometæ alicujus, dabitur arcus K C quem cometa motu diurno proprio descripsit. Quoniam enim in triangulo K M C, datur angulus quem metitur arcus I H longitudinum differentia, simulque nota sunt latera K M, C M, quæ sunt datarum latitudinum K I, C H complementa, innotescet arcus K C. Si verò altera latitudo fuerit australis, putà C H, altera Borealis ut G N, latus G M est summa latitudinis G N & quadrantis N M, ac proinde etiam in hoc casu dabitur arcus C G.

153. Iisdem manentibus, inveniri potest nodus O orbitæ cometæ datis enim in triangulo M C K lateribus M C, M K, cum angulo intercepto M quem metitur longitudinum datarum differentia H I, dabitur angulus M K C, qui ex 180°. subductus, relinquit angulum O K I. Jam verò datis triangulo O K I, ad I rectangulo, latitudine I K, & angulo O K I, invenitur angulus I O K, daturque arcus O I, quo addito longitudini I, obtinetur distantia nodi O à principio arietis. Ex præcedentibus patet datis duabus ascensionibus rectis & declinationibus inveniri quoque motum cometæ proprium, inclinationem orbitæ ad æquatorem & punctum in quo orbita illa æquatorem intersecat. 152.

154. Iisdem positis sit K locus cometæ primò observatus, à loco nodi O subtrahatur longitudo cometæ I, relinquetur arcus O I. Datis in triangulo K O I, ad I rectangulo, lateribus K I, O I, dabitur arcus K O quem cometa à primo observationis die usque ad Eclipticam descripsit. Jam verò arcus K O conferatur cum arcubus descriptis ab initio observationis cometæ in K, ad datum usque aliquod momentum singulis diebus pro arbitrio assumptum. Hinc proportionali parte adhibitâ, circiter colligetur tempus quo cometa secuit Eclipticam. Simili modo invenietur tempus quo trajecit æquatorem.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Jam ad orbem cometæ determinandum; ſelegi ex obſervationibus hactenus deſcriptis, tres quas *Flamſtedius* habuit *Dec.* 21. *Jan.* 5. & *Jan.* 25. (b) Ex his inveni St partium 9842,1 & Vt partium 455, quales 10000 ſunt ſemidiameter orbis magni. Tum ad operationem primam aſſumendo tB partium 5657, inveni SB 9747, BE primâ vice 412, $S\mu$ 9503, $i\lambda$ 413: BE ſecundâ vice 421, OD 10186, X 8528,4 MP 8450, MN 8475, NP 25. Unde ad operationem ſecundam collegi diſtantiam tb 5640. Et per hanc operationem tandem diſtantias TX 4775 & τZ 11322. Ex quibus orbem definiendo, inveni nodos ejus deſcendentem in ♋ & aſcendentem in ♑ 1 gr. 53′; inclinationem plani ejus ad planum eclipticæ 61 gr. 20′⅓; verticem ejus (ſeu perihelium cometæ) diſtare à nodo 8 gr. 38′, & eſſe in ♐ 27 gr. 43′ cum latitudine auſtrali 7 gr. 34′; & ejus latus rectum eſſe 236,8, areamque radio ad ſolem ducto ſingulis diebus deſcriptam 93585, quadrato ſemidiametri orbis magni poſito 100000000; cometam verò in hoc orbe ſecundum ſeriem ſignorum proceſſiſſe, & *Decemb.* 8d. 0h. 4′. p. m. in vertice orbis ſeu perihelio fuiſſe. Hæc omnia per ſcalam partium æqualium & chordas angulorum ex tabulâ ſinuum naturalium collectas determinavi graphicè; conſtruendo ſchema ſatis amplum, in quo videlicet ſemidiameter orbis magni (partium 10000) æqualis eſſet digitis 16⅓ pedis *Anglicani.*

Tan-

156. 155. Si cometa primò obſervetur in eâdem rectâ cum duabus fixis, deinde in aliâ quoque rectâ cum duabus aliis fixis obſervetur, accurate trajectis per quatuor illas ſtellas duobus filis in ſuperficie globi cœleſtis, interſectio filorum determinabit locum cometæ pro tempore obſervationis. Si eodem modo definiantur alia cometæ loca, illius ſemita in ſuperficie globi cœleſtis delineabitur.

156. Accuratè deſignatis in ſuperficie globi cometæ locis, filum duobus locis applicatum per cætera omnia propemodum tranſire videbitur; Hæc igitur loca ferè ſunt in peripheriâ circuli maximi, ideóque cometa ex terra in circuli maximi peripheriâ incedere apparebit. Quare ſi filum per duo loca tranſiens extendatur donec Eclipticam & æquatorem ſecet, habebuntur locus nodi, & inclinatio orbitæ cometicæ, ſimulque punctum in quo cometa trajicit æquatorem.

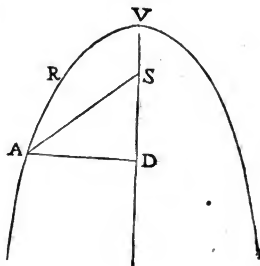
(b) * *Ex his inveni.* Quâ ratione ſequentes determinationes poſſint inveniri vel graphice vel arithmetice, patet ex conſtructione prop. præced. & ex iis quæ huic propoſitioni addidimus.

Tandem ut constaret an cometa in orbe sic invento verè moveretur, collegi per operationes partim arithmeticas partim graphicas loca cometæ in hoc orbe ad observationum quarundam tempora: uti in tabulâ sequente videre licet.

	Distant. Comet. à Sole.	Long. Collect.	Lat. Collect.	Long. Obs.	Lat. Obs.	Differ. Long.	Differ. Lat.
		gr.	gr.	gr. ′	gr. ′	′	′
Dec. 12	2792	♑ 6 . 32′	8 . 18$\frac{1}{2}$	♑ 6.31$\frac{1}{3}$	8.26	+ 1	− 7$\frac{1}{2}$
29	8403	♓ 13 . 13$\frac{2}{3}$	28 . 0	♓ 13.11$\frac{3}{4}$	28.10$\frac{1}{12}$	+ 2	− 10$\frac{1}{12}$
Feb. 5	16669	♉ 17 . 0	15 . 29$\frac{2}{3}$	♉ 16.59$\frac{7}{8}$	15.27$\frac{2}{5}$	+ 0	+ 2$\frac{1}{4}$
Mar. 5	21737	29 . 19$\frac{3}{4}$	12 . 4	29.20$\frac{6}{7}$	12. 3$\frac{1}{2}$	− 1	+ $\frac{1}{2}$

Postea vero *Halleius* noster orbitam (c) per calculum arithmeticum accuratiùs determinavit, quam per descriptiones linearum fieri licuit; & retinuit quidem locum nodorum in ♋ & ♑ 1gr. 53′, & inclinationem plani orbitæ ad eclipticam 61gr. 20′

(c) 157. * *Per calculum arithmeticum.* Calculi hujus instituendi methodum exponemus. Sit S Sol, V R A orbita cometæ parabolica, cujus vertex V, sitque VS, distantia umbilici à vertice $= f$, erit parabolæ latus rectum principale $= 4f$. Fiat $AD = x$, erit spatium $VRAS = \frac{x^3 + 12f^2x}{24f}$ (140). Ponatur area illa dato rectilineo æqualis putâ bb, habebitur æquatio $24fbb = x^3 + 12f^2x$. Resolutâ hâc æquatione cubicâ per vulgares algebræ regulas, vel per constructionem geometricam, adhibitis parabolâ & circulo, innotescet ordinatim applicata AD. Datâ autem AD, dabitur VD, (per theor. 2. de parab.) quare nota quoque erit recta composita ex DV & VS, cui æqualis est recta SA. (ibid.), ideóque recta illa dabitur magnitudine. Præterea datur etiam DA, quare nota est ratio inter SA & AD, id est, inter radium & sinum rectum anguli ASD, quem scilicet SA cum axe comprehendit, ideóque datur angulus ille. Sed data est SA longitudine, quare rectæ SA longitudo & inclinatio ad axem] calculo determinari possunt. 157.



DE MUNDI SYSTEMATE.

$20'\frac{1}{3}$, ut & tempus perihelii cometæ *Decemb.* 8^d. 0^h. $4'$: distantiam vero perihelii à nodo aſcendente in orbitâ cometæ menſuratam invenit eſſe 98^{gr}. $20'$, & latus rectum parabolæ eſſe 2430 partium, exiſtente mediocri ſolis à terrâ diſtantiâ partium 100000. Et ex his datis, calculo itidem arithmetico accuratè inſtituto, loca cometæ ad obſervationum tempora computavit, ut ſequitur.

Tem-

158. 158. Referat ☊ ω V, Cometæ trajectoriam in cujus umbilico S collocatur Sol, ſitque ω punctum quod cometa occupavit in aliquâ harum obſervationum quarum ope trajectoria definita fuit. Trajectoriæ hujus ſit axis V X poſitione datus; innoteſcat tempus quo cometa in perihelio V verſatur, ſitque ☊ ☋ linea nodorum poſitione cognitâ. Si cometæ trajectoria inventa fuerit parabolica, capiatur ſpatium quod ſit ad ſpatium ω V S, cognitum (per theor. 4. de parab.) ut intervallum inter tempus datum & ſuprà inventum momentum quo cometa perihelium attingit, ad intervallum inter prædictum momentum & obſervationem cometæ in ω; ponatur ſpatium illud dato rectilineo, puta *b b*, æquale. Deinde (157.) ipſi *b b* æquale fiat ſpatium parabolicum V R A S, & inveniatur tam poſitio quam magnitudo rectæ S A reſpectu S V, cujus poſitio & magnitudo reſpectu diſtantiæ aphelii terræ à ſole priùs notæ ſunt. At ſi cometæ trajectoria deprehendatur elliptica, per methodos in prop. 31. lib. 1. expoſitas, ducatur recta SA, talis ut area V R A S, ſit ad totam ellipſeos aream, ſicut intervallum inter tempus datum & momentum quo perihelium occupat integrum cometæ tempus periodicum quod ex dato orbitæ cometicæ axe principali cognitum eſt, dabiturque rectâ S A tam poſitione quam magnitudine. Jam verò in utroque caſu ex A ad nodorum lineam ☋ ☊ erigatur normalis A N, rectæ ☋ ☊ occurrens in N; ex eodem A, ad Eclipticæ planum demittatur perpendicu-

lum

Tempus verum.		Distantia Cometæ a ☉	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in. Long.	Errores in. Lat.
	d. h. ′	′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Dec.	12. 4.46	28028	♑ 6.29.25	8.26. 0 Bor.	− 3. 5	− 2. 0
	.7	61076	5. 6.30	21.43.20	− 1.42	+ 1. 7
	24. 6.18	70008	18..3.20	25.22.40	− 1. 3	− 0.25
	26. 5.21	75576	28.22.45	27. 1.36	− 1.28	+ 0.44
	29. 8. 3	14021	♓ 13.12.40	28.10.10	+ 1.59	+ 0.12
	30. 8.10	86661	17.40. 5	28.11.20	+ 1.45	− 0.33
Jan.	5. 6. 1½	101440	♈ 8.49.49	26.15.15	+ 0.56	+ 0. 8
	9. 7. 0	110959	18.44.36	24.12.54	+ 0.32	+ 0.58
	10. 6. 6	113162	20.41. 0	23.44.10	+ 0.10	+ 0.18
	13. 7. 9	120000	26. 0.21	22.17.30	+ 0.33	+ 0. 2
	25. 7.59	145370	♉ 9.33.40	17.57.55	− 1.20	+ 1.25
	30. 8.22	155303	13.17.41	16.42. 7	− 2.10	− 0.11
Feb.	2. 6.35	160951	15.11.11	16. 4.15	− 2.42	+ 0.14
	5. 7. 4½	166686	16.58.25	15.29.13	− 0.41	+ 2.10
	25. 8.41	202570	26.15.46	12.48. 0	− 2.49	+ 1.14
Mar.	5.11.39	216205	29.18.35	12. 5.40	+ 0.35	+ 2.24

Apparuit etiam hic cometa mense *Novembri* præcedente & *Coburgi* in *Saxoniâ* à D^no^. *Gottfried Kirch* observatus est diebus mensis hujus quarto, sexto & undecimo, stylo veteri; & ex positionibus ejus ad proximas stellas fixas ope telescopii nunc bipedalis nunc decempedalis satis accuratè observatis, ac differentia longitudinum *Coburgi* & *Londini* graduum undecim & locis fixarum à *Poundio* nostro observatis, *Halleius* noster loca cometæ determinavit ut sequitur.

No-

lum eidem rectæ occurrens in a, junganturque a N, a S, erit angulus A N a, inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ ac proinde cognitus (146) Deinde quoniam noti sunt anguli V S A, V S N, notus quoque erit angulus N S A, horum summa vel differentia. Quare in triangulo rectangulo N a A, datis latere N A, & angulo A N a, innotescent reliqua latera N a & A a. Præterea in triangulo rectangulo S N a, dantur latera S N & N a, ideóque dabuntur latus S a, & angulus N S a. Sed (145.) datur positio rectæ S N, quare nota erit positio rectæ S a, hoc est, cometæ longitudo heliocentrica, sive locus cometæ heliocentricus ad Eclipticam reductus. Denique in triangulo S A a rectangulo ad a, nota sunt omnia latera, ac proinde dabitur angulus A S a, latitudo cometæ heliocentrica. Ex his quoque patet vicissim inveniri posse tempus quo cometa datum in orbe suo locum tenet. 158.

De Mundi Systemate. *Novem.* 3[d]. 17[h]. 2′, tempore apparente *Londini*, cometa erat in ♌ 29gr. 51′. cum lat. bor. 1gr. 17′. 45″,

Novem. 5[d]. 15[h]. 58′ cometa erat in ♍ 3gr. 23′ cum lat. bor. 1gr. 6′.

No-

159. 159. Iisdem manentibus sit BT orbis magnus, sitque tellus in T ad tempus datum. Jungantur TA, Ta, erit planum trianguli TAa, ad planum Eclipticæ normale (prop. 18. lib. 11. elem.) Jam in triangulo TSa, in plano Eclipticæ datur latus Sa, (158.), notumque est latus ST, ex theoriâ telluris, & utrumque latus in partibus mediocris distantiæ telluris à sole expressum habetur. Præterea ob latera illa positione cognita, datur angulus TSa, ab illis comprehensus, quarè innotescent latus Ta, & angulus STa; Sed datur TS positione, nempe locus solis ad tempus datum, nota igitur est positio rectæ Ta, hoc est, cometæ longitudo geocentrica, sive locus cometæ geocentricus ad Eclipticam reductus. Deinde in triangulo rectangulo AaT, dantur latera duo in partibus mediocris distantiæ telluris à sole expressa (158 & ex theoriâ telluris). Quarè innotescet angulus ATa, hoc est, cometæ latitudo geocentrica, itemque dabitur hypothenusa TA, distantia scilicet cometæ à terrâ. Ex his itaque patet quomodo ad data observationum tempora, instituto calculo, loca cometæ possint computari. Clariss. Halleius iisdem usus principiis ad definiendos cometarum motus maximo labore tabulas construxit. Harum tabularum normam videat Lector in ejusdem Celeberrimi Viri opusculo quod inscribitur:

come-

Novem. 10^d. 16^h. 31$'$ cometa æqualiter diſtabat à ſtellis leonis σ ac τ *Bayero*; nondum verò attigit rectam eaſdem jungentem, ſed parum abſuit ab eâ. In ſtellarum catalogo *Flamſtedian.o* σ tunc habuit ♍ 14gr. 15$'$ cum lat. bor. 1gr. 41$'$ ferè, τ verò ♍ 17gr. 3$\frac{1}{2}$, cum lat auſtr. 0gr. 34$'$. Et medium punctum inter has ſtellas fuit ♍ 15gr. 39$\frac{1}{4}$, cum lat. bor. 0gr. 33$\frac{1}{2}$. Sit diſtantia cometæ à rectâ illâ 10$'$ vel 12$'$ circiter, & differentia longitudinum cometæ & puncti illius medii erit 7$'$, & differentia latitudinum 7$\frac{1}{2}$, circiter. Et inde cometa erat in ♍ 15gr. 32$'$ cum lat. bor. 26$'$ circiter.

Obſervatio prima ex ſitu cometæ ad parvas quaſdam fixas abundè ſatis accurata fuit. Secunda etiam ſatis accurata fuit. In tertia, quæ minùs accurata fuit, error minutorum ſex vel ſeptem ſubeſſe potuit, & vix major. Longitudo verò cometæ in obſervatione primâ, quæ cæteris accuratior fuit, in orbe prædicto parabolico computata erat ♌ 29gr. 30$'$. 22$''$. latitudo borealis 1gr. 25$'$. 7$''$. & diſtantia ejus à ſole 115546.

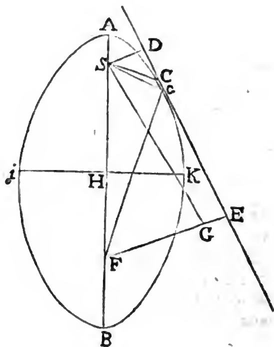
Porro *Halleius* obſervando quod cometa inſignis intervallo annorum 575 quater apparuiſſet, ſcilicet menſe *Septembri* poſt cædem *Julii Cæſaris*, anno *Chriſti* 531 *Lampadio* & *Oreſte Coſſ.* anno *Chriſti* 1106 menſe *Februario*, & ſub finem anni 1680, idque cum caudâ longâ & inſigni (præterquam quod ſub mortem

cometographia, ſeu Aſtronomiæ cometicæ Synopſis.

160. Si cometæ orbitas ellipticas deſcribere & duas Kepleri leges obſervare ponantur, hoc eſt, ſi temporum periodicorum quadrata ſint ut cubi mediocrium diſtantiarum à ſole & areæ ellipticæ radiis ad ſolem ductis ſint temporibus proportionales, facilè determinabitur orbitæ cometicæ magnitudo, omneſque motûs cometarum circumſtantiæ definientur, quod elegantiſſime præſtitit D. Bouguer in monum. Pariſ. an. 1733. Clariſſimi Viri methodum hic adjungemus.

Ex datis tribus obſervationibus à ſe invicem parum diſtantibus, inveniatur cometæ velocitas in aliquo orbitæ ſuæ loco, & exigua ejuſdem orbitæ portio determinetur. Quoniam tria obſervationum tempora parum à ſe invicem diſtant, portio orbitæ hoc temporis intervallo deſcripta conſiderari poterit tanquam linea recta vel ipſamet tangens orbitæ motu uniformi percurſa, ideoque portio hæc rectilinea orbitæ & ipſa cometæ velocitas inveniri poterunt per Lem 4. & per ea quæ huic lemmati addidimus. Idem quoque obtinebitur duplici elegantiſſimâ methodo quæ in monum. Pariſ. loco citato legitur. 160.

tem *Cæſaris*, cauda ob incommodam telluris poſitionem minùs ap-



180. His præmiſſis, ſit S ſol, C c exigua orbitæ cometicæ portio ex tribus obſervationibus determinata. Quoniam nota eſt SC, diſtantia ſcilicet cometæ à ſole atque etiam innoteſcit angulus SCD, dabitur perpendicularis SD, hujus anguli SCD ſinus, ſumpto SC, pro radio. Dicatur $SC = a$, $SD = b$, deſignet e, ſpatiolum C c, tempuſculo f percurſum, ſitque $x = AB$, ſeu axi principali ellipſeos quam cometa circà ſolem in umbilico S, poſitum integro tempore periodico t, deſcribit. Ut determinentur quantitates x & t, conferre oportet motum cometæ cum motu cognito planetæ alicujus. Sit q axis principalis ellipſeos quam planeta deſcribit, n tempus periodicum, dicaturque p peripheria circuli cujus diameter eſt q. Quoniam axis principalis ellipſeos eſt ſumma maximæ & minimæ diſtantiæ planetæ à ſole, erit diſtantia mediocris planetæ à ſole æqualis dimidio axi principali, hoc eſt $\frac{1}{2}x$ eſt diſtantia mediocris cometæ, & $\frac{1}{2}q$ diſtantia mediocris planetæ. Jam verò fiat (per leg. 1. Kepleri.) $\frac{1}{8}q^3 : n^2 = \frac{1}{8}x^3 : t^2$ hinc fit $t = \frac{nx}{q}\sqrt{\frac{x}{q}}$. Invenienda ſupereſt altera expreſſio temporis periodici t. Quoniam C c, eſt portio orbitæ admodum exigua, ſector CSc, conſiderari poterit inſtar trianguli evaneſcentis cujus area $\frac{1}{2}SD \times Cc = \frac{1}{2}be$. Quarè, per alteram Ke-

pleri

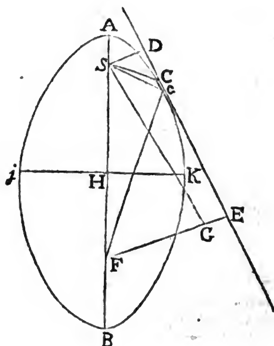
apparuisset:) quæsivit orbem ellipticum cujus axis major esset par- LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.

pleri regulam, dicatur $\frac{1}{2}\, b\, e$ est ad f, ut area tota ellipseos ACBI, ad integrum tempus periodicum t, unde habetur $t = \frac{f}{\frac{1}{2} b e} \times$ ACBI. Nunc ut obtineatur area ACBI, ex puncto C, ad alterum umbilicum F, agatur recta CF = AB − SC $= x - a$ (theor. 3. de ellipsi). Ex eodem umbilico F, ad tangentem Cc productam in E, demittatur perpendicularis FE, sitque SG parallela rectæ DE, triangula rectangula SCD, FCE similia sunt, ob angulos SCD, FCE, æquales (theor. 4. de ellips.) ideóque SC (a) : SD (b) = FC $(x-a)$: FE $= \frac{bx - ab}{a}$, ac proinde FG, seu FE − SD $= \frac{bx - 2ab}{a}$.

Deinde (ob eorumdem triangulorum similitudinem) SC (a) : CD $(\sqrt{a^2 - b^2})$ = FC $(x-a)$: CE $= \frac{x-a}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$, & hinc DE, vel SG, seu CE + CD $= \frac{x-a}{a}\sqrt{a^2-b^2} + \sqrt{a^2-b^2} = \frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}$. Sed FG $= \frac{bx - 2ab}{a}$ (ex dem.), quaré est SF $= \frac{\sqrt{b^2x^2 - 4ab^2x + 4a^2b^2 + a^2x^2 - b^2x^2}}{a^2} = \sqrt{\frac{a^2x^2 - 4ab^2x + 4a^2b^2}{a^2}}$; ideóque distantia SH vel FH umbilici alterutrius à centro $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2x^2 - 4ab^2x + 4a^2b^2}{a^2}}$ Jam (ob triangulum SIH rectangulum in H, & per theor. 3. de ellipsi) erit IH $= \sqrt{\frac{1}{4}x^2 - \frac{a^2x^2 + 4ab^2x - 4a^2b^2}{4a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{ax - a^2}$ ac proinde axis minor IK $= \frac{2b}{a}\sqrt{ax - a^2}$, & factum ex axe majori in minorem $= \frac{2bx}{a}\sqrt{ax - a^2}$. Sed est factum illud area rectanguli orbitæ ellipticæ circumscripti, & præterea (249. lib. 1.) area rectanguli hujus est ad aream ellipseos ut quadratum axis AB, ad aream circuli huic quadrato 161.
inscripti; quare $q^2 : \frac{1}{4} q p = \frac{2bx}{a}\sqrt{ax - a^2}$: ACBI $= \frac{bpx}{2aq}\sqrt{ax - a^2}$. Tandem in ultimâ expressione temporis periodici loco areæ ACBI, substituatur illius valor modo inventus, fiet $t = \frac{fpx}{aeq}\sqrt{ax - a^2}$, collatisque duobus ipsius t valoribus, habebitur $\frac{nx}{q}\sqrt{\frac{x}{q}} = \frac{fpx}{aeq}\sqrt{ax - a^2}$, & reductâ æquatione $x = \frac{af^2p^2q}{f^2p^2q - ae^2n^2}$. Jam si in expressionibus axis minoris & temporis periodici substituatur valor ipsius x, erit axis minor IK $= 2ben\sqrt{\frac{a}{f^2p^2q - ae^2n^2}}$ & tempus periodicum $= f^1 p^3 n \times \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\overline{f^2p^2q - ae^2n^2}^{\frac{3}{2}}}$. Hinc patet determinari posse omnia quæ ad cometarum motus pertinent.

161. Si formulæ modò inventæ quantitatibus finitis & positivis exprimantur, orbita ACBI erit elliptica, ideóque cometa reditum habebit. Quia verò circulus est species quædam ellipsis, cometa circulum quoque poterit describere, in eo autem casu æquales erunt distantiæ SA, SC, SB, axisque AB duplus fiet distantiæ SC, ac proinde $\frac{af^2p^2q}{f^2p^2q - ae^2n^2} = 2a$, & hinc $e = \frac{fp}{n}\sqrt{\frac{q}{2a}}$, valor scilicet spatioli Cc à cometa tempore f percursi. Si ea sit cometæ velocitas ut fiat $ae^2n^2 = f^2p^2q$, tunc infinito æquales evadent expressiones axis majoris, minoris & temporis periodici; quare orbita cometæ mutabitur in ellipsim infinite oblongatam seu parabolam, ideoque cometa reditum non habet. Tandem si ae^2n^2, sit major quam

partium 1382957, exiſtente mediocri diſtantiâ telluris à ſole par-



162. $f^2 p^2 q$, negativa fit expreſſio axis majoris & orbita abit in hyperbolam ac proinde cometa nunquam futurus eſt iterum conſpicuus.

162. Ut prædictæ formulæ ad calculum reducantur, cometarum motus cum telluris motu conferatur. Sit q dupla diſtantia mediocris terræ à Sole, p peripheria circuli cujus diameter q, n annus ſydereus ſeu intervallum 365. dier. 6ho. 9': fiat mediocris diſtantia telluris à ſole partium 10000000, ideòque $q = 20000000$, & $p = 62831853$, ſpatium Cc unius diei intervallo cometa ponatur deſcripſiſſe. His valoribus ſubſtitutis in formulis præcedentibus erit $x = \frac{59182659953557939 \times a}{59182659953557939 - ae^2}$ &$t =$

$$\frac{1859278095175402222 \times a^{\frac{3}{2}}}{\overline{5918265995355579\,9 - ae^2}^{\frac{3}{2}}}.$$

Jam nihil amplius faciendum ſupereſt, niſi ut in caſibus particularibus loco a, & e, ſubſtituantur valores per obſervationem determinati. Utrum verò cometa rediturus ſit vel non cognoſcetur, ſi quantitas ae^2, minor majorve reperiatur numero conſtanti 59182659953557939. Minùs prolixus fiet calculus, ſi diſtantiam mediocrem telluris à ſole ponamus partium 10000, tunc enim erit $x = \frac{591826599 \times a}{591826599 - ae^2}$, & $t =$

$$\frac{1859278095 \times a\sqrt{a}}{\overline{591826599 - ae^2} \times \sqrt{\overline{591826599 - ae^2}}}.$$

Exemplo ſit cometa qui annis 1729. 1730. apparuit. Ex obſervationibus Clariſſ. Caſſini colligitur die 13â Octobris an. 1729. diſtantiam SC cometæ à ſole, fuiſſe partium 42998, exiguam orbitæ portionem diei unius intervallo deſcriptam, fuiſſe partium $122\frac{452}{10000}$, atque angulum DCS, fuiſſe 82°. 11'. Hinc invenitur quantitas ae^2 major quam 591826599, ideóque

partium 10000: in quo orbe utique cometa annis 575 (d) revolvi possit. Et ponendo nodum ascendentem in ♋ 2gr. 2′; inclinationem plani orbis ad planum eclipticæ 61gr. 6′. 48″.; perihelium cometæ in hoc plano ♐ 22gr. 44′. 25″; tempus æquatum perihelii *Decem.* $7^d. 23^h. 9'$; distantiam perihelii à nodo ascendente in plano eclipticæ 9gr. 17′. 35″; & axem conjugatum 18481,2: (e) computavit motum cometæ in hoc orbe elliptico. Loca autem ejus tam ex observationibus deducta quam in hoc orbe computata exhibentur in tabulâ sequente. LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROB. XXI.

(161) orbita cometæ est hyperbola, ac proindè expectandus non est hujus cometæ regressus. Cæterùm hæc vera sunt in eâ duntaxat hypothesi quod cometæ duas Kepleri leges observent.

(d) 163. * *Revolvi possit.* Quadrata temporum periodicorum in cometis æque ac in planetis ponantur ut cubi mediocrium distantiarum à sole, tempus periodicum cometæ dicatur t, tempus periodicum terræ circà solem dicatur T, distantia mediocris terræ à sole sit D, axis major ellipseos à cometa descriptæ sit $2a$, ideóque mediocris distantia cometæ à sole $= a$, erit $T^2 : t^2 = D^3 : a^3$. Fiat D = 10000 partibus T = 365 dieb. 6^{hor}. 9′ = 525969′, t = 575 annis, invenietur $2a$, seu axis major ellipseos à Cometá descriptæ, partium 1382957, existente mediocri distantiá telluris à sole earumdem partium 10000. in hoc igitur orbe cometa annis 575 revolvi potest. 163.

(e) * *Computavit motum cometæ.* Ratio computi ineundi patet ex num. 158. 159 vel etiam ex methodo Clariss. D. Bouguer num. 160. & seq.

Tem-

DE MUNDI SYSTEMATE.

	Tempus verum	Long. obſ.	Lat. Bor. obſ.	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in Long.	Errores in Lat.
	d. h.	gr.	gr.	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Nov.	3.15.47″	♌29.51′. 0″	1.17.45″	♌ 29.51.22	1.17.32 B	+0.22	−0.13
	5.15.37	♍ 3.23. 0	1. 6. 0	♍ 3.24.32	1. 6. 9	+1.32	+0. 9
	10.16.18	15.32. 0	0.27. 0	15.33. 2	0.25. 7	+1. 2	−1.53
	16.17. 0			♎ 8.16.45	0.53. 7 A		
	18.21.34			18.52.15	1.26.54		
	20.17. 0			28.10.36	1.53.35		
	23.17. 5			♏ 13.22.42	2.29. 0		
Dec.	12. 4.46	♑ 6.32.30	8.28. 0	♑ 6.31.20	8.29. 6 B	−1.10	+1. 6
	21. 6.37	♒ 5. 8.12	21.42.13	♒ 5. 6. 4	21.44.42	−1.58	+2.29
	24. 6.18	18.49.23	25.23. 5	18.47.30	25.23.35	−1.53	+0.30
	26. 5.21	28.24.13	27. 0.52	28.21.42	27. 2. 1	−2.31	+1. 9
	29. 8. 3	♓ 13.10.41	28. 9.58	♓ 13.11.14	28.10.38	+0.33	+0.40
	30. 8.10	17.38.20	28.11.53	17.38.27	28.11.37	+0. 7	−0.16
Jan.	5. 6. $1\frac{1}{2}$	♈ 8.48.53	26.15. 7	♈ 8.48.51	26.14.57	−0. 2	−0.10
	9. 7. 1	18.44. 4	24.11.56	18.43.51	24.12.17	−0.13	+0.21
	10. 6. 6	20.40.50	23.43.32	20.40.23	23.43.25	−0.27	−0. 7
	13. 7. 9	25.59.48	22.17.28	26. 0. 8	22.16.32	+0.20	−0.56
	25. 7.59	♉ 9.35. 0	17.56.30	♉ 9.34.11	17.56. 6	−0.49	−0.24
	30. 8.22	13.19.51	16.42.18	13.18.28	16.40. 5	−1.23	−2.13
Feb.	2. 6.35	15.13.53	16. 4. 1	15.11.59	16. 2. 7	−1.54	−1.54
	5. 7. $4\frac{1}{2}$	16.59. 6	15.27. 3	16.59.17	15.27. 0	+0.11	−0. 3
	25. 8.41	26.18.35	12.46.46	26.16.59	12.45.22	−1.36	−1.24
Mar.	1.11.10	27.52.42	12.23.40	27.51.47	12.22.28	−0.55	−1.12
	5.11.39	29.18. 0	12. 3.16	29.20.11	12. 2.50	+2.11	−0.26
	9. 8.38	0.43. 4	11.45.52	♊ 0.42.43	11.45.35	−0.21	−0.17

Obſervationes cometæ hujus à principio ad finem non minùs congruunt cum motu cometæ in orbe jam deſcripto, quam motus planetarum congruere ſolent cum eorum theoriis, & congruendo probant unum & eundem fuiſſe cometam, qui toto hoc tempore apparuit, ejuſque orbem hic rectè definitum fuiſſe.

In tabulâ præcedente omiſimus obſervationes diebus *Novembris* 16, 18, 20 & 23 ut minùs accuratas. Nam cometa his etiam temporibus obſervatus fuit. *Ponthæus* utique & ſocii, *Novem.* 17. ſt. vet. horâ ſextâ matutinâ *Romæ*, id eſt, hora 5. 10′ *Londini*, filis ad fixas applicatis, cometam obſervarunt in ♎ 8gr. 30′ cum latitudine auſtrali 0gr. 40′. Extant eorum obſervationes in tractatu, quem *Ponthæus* de hoc cometâ in lucem edidit. *Cellius*, qui aderat & obſervationes ſuas in epiſtolâ ad *D. Caſſinum* miſit, cometam eâdem horâ vidit in ♎ 8gr. 30′.

30'. cum latitudine australi 0gr. 50'. Eâdem horâ *Galletius Avenioni* (id est, horâ matutinâ 5. 42 *Londini*) cometam vidit in ♎ 8gr. sine latitudine. Cometa autem per theoriam jam fuit in ♎ 8gr. 16'. 45" cum latitudine australi 0gr. 53'. 7".

Nov. 18 horâ matutinâ 6 30' *Romæ* (id est, horâ 5, 40'. *Londini*) *Ponthæus* cometam vidit in ♎ 13gr. 30' cum latitudine australi 1gr. 20' *Cellius* in ♎ 13gr. 30' cum latitudine australi 1gr. 00'. *Galletius* autem horâ matutinâ 5. 30 *Avenioni* cometam vidit in ♎ 13gr. 00', cum latitudine australi 1gr. 00'. Et *R. P. Ango* in Academiâ *Flexiensi* apud *Gallos*, horâ quintâ matutinâ (id est, horâ 5. 9' *Londini*) cometam vidit in medio inter stellas duas parvas, quarum una media est trium in recta linea in virginis australi manu *Bayero* ψ, & altera est extrema alæ *Bayero* θ. Unde cometa tunc fuit in ♎ 12gr. 46'. cum latitudine australi 50'. Eodem die *Bostoniæ* in *Novâ Anglia* in latitudine 42½ graduum, horâ quintâ matutinâ, (id est *Londini* horâ matutinâ 9. 44') cometa visus est prope ♎ 14gr. cum latitudine australi 1gr. 30, uti à cl. *Halleio* accepi.

Nov. 19. hora mat. 4½ *Cantabrigiæ*, cometa (observante juvene quodam) distabat à spicâ ♍ quasi 2gr. boreazephyrum versus. Erat autem spica in ♎ 19gr. 23. 47" cum lat. austr. 2gr. 1'. 59'. Eodem die hor. 5. mat. *Bostoniæ* in *Novâ Angliâ*, cometa distabat à spica ♍ gradu uno, differentia latitudinum existente 40'. Eodem die in Insula *Jamaicâ*, cometa distabat à spicâ intervallo quasi gradus unius. Eodem die D. *Arthurus Storer* ad fluvium *Patuxent*, prope *Hunting-Creek* in *Maryland*, in confinio *Virginiæ* in lat. 38½ gr., horâ quintâ matutinâ (id est, horâ 10ᵃ *Londini*) cometam vidit supra spicam ♍, & cum spicâ propemodum conjunctum, existente distantiâ inter eosdem quasi ¾ gr. Et (f) ex his observationibus inter se collatis colligo quod hora 9.44' *Londini* cometa erat in ♎ 18gr. 50' cum latitudine australi 1gr. 25'. circiter. Cometa autem

(f) * *Ex his observationibus inter se collatis via cometæ inter stellas determinatur,* & hinc colligitur cometæ longitudo & latitudo (149) hor. 9. 44' Londini. reductione scilicet factâ ad meridianum Londinensem. 163.

DE MUNDI SYSTEMATE.

tem per theoriam jam erat in ♎ 18gr. 52'. 15'' cum latitudine australi 1gr. 26'. 54''.

Nov. 20. D. *Montenarus* Astronomiæ Professor *Paduensis*, horâ sextâ matutinâ *Venetiis* (id est, horâ 5. 10' *Londini*) cometam vidit in ♎ 23gr. cum latitudine australi 1gr. 30. Eodem die *Bostoniæ*, distabat cometa à spicâ ♍, 4gr. longitudinis in orientem, ideoque erat in ♎ 23gr. 24' circiter.

Nov. 21. *Ponthæus* & socii hor. mat. 7¼ cometam observarunt in ♎ 27gr. 50' cum latitudine australi 1gr. 16', *Cellius* in ♎ 28gr. *Ango* horâ quintâ matutinâ in ♎ 27gr. 45', *Montenarus* in ♎ 27gr. 51'. Eodem die in insulâ *Jamaicâ* cometa visus est prope principium scorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum spicâ virginis, id est, 2gr. 2'. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballasoræ* in *Indiâ Orientali*, (id est ad horam noctis præcedentis 11. 20' *Londini*) capta est distantia cometæ à spicâ ♍ 7gr. 35' in orientem. In lineâ rectâ erat inter spicam & lancem, ideoque versabatur in ♎ 26gr. 58' cum lat. australi 1gr. 11' circiter; & post horas 5 & 40' (ad horam scilicet quintam matitunam *Londini*) erat in ♎ 28gr. 12' cum lat. austr. 1gr. 16. Per theoriam vero cometa jam erat in ♎ 28gr. 10'. 36'', cum latitudine australi 1gr. 53'. 35''.

Nov. 22. Cometa visus est à *Montenaro* in ♏ 2gr. 33'. *Bostoniæ* autem in *Novâ-Angliâ* apparuit in ♏ 3gr. circiter, eâdem ferè cum latitudine ac prius, id est, 1gr. 30'. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballasoræ* cometa observabatur in ♏ 1gr. 50'; ideoque ad horam quintam matutinam *Londini* cometa erat in ♏ 3gr. 5' circiter. Eodem die *Londini* hora mat. 6½ *Hookius* noster cometam vidit in ♏ 3gr. 30' circiter, idque in lineâ rectâ quæ transit per spicam virginis & cor leonis non exactè quidem, sed a lineâ illâ paululum deflectentem ad boream. *Montenarus* itidem notavit quod linea à cometâ per spicam ducta, hoc die & sequentibus transibat per australe latus cordis leonis interposito perparvo intervallo inter cor leonis & hanc lineam. Linea recta per cor leonis & spicam virginis transiens, eclipticam secuit in ♍ 3gr. 46'; in angulo 2gr. 51'.

Et

Et si cometa locatus fuisset in hâc lineâ in ♍ 3gr. ejus latitudo fuisset 2gr 26'. Sed cum cometa consentientibus *Hookio* & *Montenaro*, nonnihil distaret ab hâc lineâ boream versus, latitudo ejus fuit paulo minor. Die 20. ex observatione *Montenari*, latitudo ejus propemodum æquabat latitudinem spicæ ♍, eratque 1gr. 30' circiter, & consentientibus *Hookio*, *Montenaro* & *Angone* perpetuò augebatur, ideoque jam sensibiliter major erat quam 1gr. 30'. Inter limites autem jam constitutos 2gr. 26' & 1gr. 30', magnitudine mediocri latitudo erit 1gr. 58' circiter. Cauda cometæ, consentientibus *Hookio* & *Montenaro*, dirigebatur ad spicam ♍, declinans aliquantulum à stellâ istâ, juxta *Hookium* in austrum, juxta *Montenarum* in boream; ideoque declinatio illa vix fuit sensibilis, & cauda æquatori fere parallela existens, aliquantulum deflectebatur ab oppositione solis boream versus.

Nov. 23. st. vet. horâ quintâ matutinâ *Noriburgi* (id est hora $4\frac{1}{2}$ *Londini*) D. *Zimmerman* cometam vidit in ♍ 8gr. 8', cum latitudine australi 2gr. 31', captis scilicet ejus distantiis à stellis fixis.

Nov. 24. Ante ortum solis cometa visus est à *Montenaro* in ♍ 12gr. 52', ad boreale latus rectæ quæ per cor leonis & spicam virginis ducebatur, ideoque latitudinem habuit paulo minorem quam 2gr. 38'. Hæc latitudo, uti diximus, ex observationibus *Montenari*, *Angonis* & *Hookii*, perpetuò augebatur; ideoque jam paulò major erat quam 1gr. 58'; & magnitudine mediocri, sine notabili errore, statui potest 2gr. 18'. Latitudinem *Ponthæus* & *Galletius* jam & decrevisse volunt, & *Cellius* & observator in *Novâ-Angliâ* eandem ferè magnitudinem retinuisse, scilicet gradus unius vel unius cum semisse. Crassiores sunt observationes *Ponthæi* & *Cellii*, eæ præsertim quæ per azimuthos & altitudines capiebantur, ut & eæ *Galletii*: meliores sunt eæ quæ per positiones cometæ ad fixas à *Montenaro*, *Hookio*, *Angone* & observatore in *Novâ-Angliâ*, & nonnunquam à *Ponthæo* & *Cellio* sunt factæ. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballasoræ* cometa observabatur in ♍ 11gr. 45';

De Mundi Systemate.

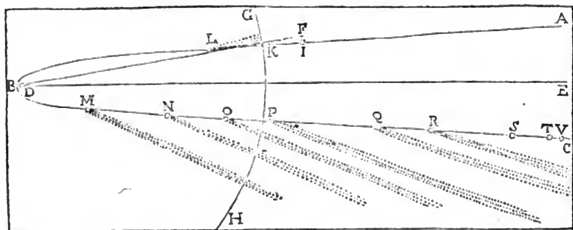
ideoque ad horam quintam matutinam *Londini* erat in ♍ 13gr. circiter. Per theoriam vero cometa jam erat in ♍ 13gr. 22'. 42''.

Nov. 25. Ante ortum solis *Montenarus* cometam observavit in ♍ 17$\frac{1}{4}$gr. circiter. Et *Cellius* observavit eodem tempore quod cometa erat in linea recta inter stellam lucidam in dextro femore virginis & lancem australem libræ, & hæc recta secat viam cometæ in ♍ 18gr. 36'. Per theoriam verò cometa jam erat in ♍ 18$\frac{1}{3}$gr. circiter.

Congruunt igitur hæ observationes cum theoriâ quâtenus congruunt inter se, & congruendo probant unum & eundem fuisse cometam, qui toto tempore à quarto die *Novembris* ad usque nonum *Martii* apparuit. Trajectoria cometæ hujus bis (g) secuit planum eclipticæ, & propterea non fuit rectilinea. Eclipticam secuit non in oppositis cœli partibus, sed in fine virginis & principio capricorni, intervallo graduum 98 circiter; ideoque cursus cometæ plurimum deflectebatur à circulo maximo. Nam & mense *Novembri* cursus ejus tribus saltem gradibus ab eclipticâ in austrum declinabat, & postea mense *Decembri* gradibus 29 vergebat ab eclipticâ in septentrionem partibus duabus orbitæ, in quibus cometa tendebat in solem & redibat à sole, angulo apparente graduum plus triginta ab invicem declinantibus, ut observavit *Montenarus*. Pergebat hic cometa per signa novem, à leonis scilicet ultimo gradu ad principium geminorum, præter signum leonis, per quod pergebat antequam videri cœpit; & nulla alia extat theoria, quâ cometa tantam cœli partem motu regulari percurrat. Motus ejus fuit maximè inæquabilis. Nam circa diem vigesimum *Novembris* descripsit gradus circiter quinque singulis diebus, dein motu retardato inter *Novemb.* 26. & *Decemb.* 12, spatio scilicet dierum quindecim cum semisse, descripsit gradus tantum 40; postea vero motu iterum accelerato, descripsit gradus ferè quinque singulis die-

163. (g) * *Bis secuit planum Eccliticæ.* Tempus quo cometa secat Eccliptucam inveniri potest per num. 145. & 154.

diebus, antequam motus iterum retardari cœpit. Et theoria, quæ motui tam inæquabili per maximam cœli partem probè respondet, quæque easdem observat leges cum theoriâ planetarum, & cum accuratis observationibus astronomicis accuratè congruit, non potest non esse vera.



Cæterùm trajectoriam quam cometa descripsit, & caudam veram quam singulis in locis projecit, visum est annexo schemate in plano trajectoriæ delineatas exhibere: ubi *A B C* denotat trajectoriam cometæ, *D* solem, *D E* trajectoriæ axem, *D F* lineam nodorum, *G H* intersectionem sphæræ orbis magni cum plano trajectoriæ, *I* locum cometæ *Nov.* 4. *Ann.* 1680, *K* locum ejusdem *Nov.* 11, *L* locum *Nov.* 19, *M* locum *Dec.* 12, *N* locum *Dec.* 21, *O* locum *Decemb* 29, *P* locum *Jan.* 5. *sequent.* *Q* locum *Jan.* 25, *R* locum *Feb.* 5, *S* locum *Feb.* 25, *T* locum *Mar.* 5, & *V* locum *Mar.* 9. Observationes vero sequentes in caudâ definiendâ adhibui.

Nov. 4. & 6 Cauda nondum apparuit. *Nov.* 11. Cauda jam cœpta non nisi semissem gradus unius longa tubo decempedali visa fuit. *Nov.* 17. Cauda gradus amplius quindecim longa *Pouthæo* apparuit. *Nov.* 18. Cauda 30gr. longa, solique directè

DE MUNDI SYSTEMATE.

opposita in *Novâ-Angliâ* cernebatur, & protendebatur usque ad stellam ♂, quæ tunc erat in ♍ 9gr. 54′. *Nov.* 19. In *Mary-land* cauda visa fuit gradus 15 vel 20 longa. *Dec.* 10. Cauda (observante *Flamstedio*) transibat per medium distantiæ inter caudam serpentis Ophiuchi & stellam δ in aquilæ australi alâ, & desinebat prope stellas *A*, ω, *b* in tabulis *Bayeri*. Terminus igitur erat in ♑ 19½ gr. cum latitudine boreali circiter. *Dec.* 11. Cauda surgebat ad usque caput sagittæ (*Bayero* α, β,) desinens in ♑ 26gr. 43′, cum latitudine boreali 38gr. 34′. *Dec.* 12. Cauda transibat per medium sagittæ, nec longè ultra protendebatur, desinens in ♒ 4gr. cum latitudine boreali 42½gr. circiter. Intelligenda sunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obscuriore, in cœlo forsan magis sereno, cauda *Dec.* 12, hora 5. 40′ *Romæ* (observante *Ponthæo*) supra cygni uropygium ad gradus 10 sese extulit; atque ab hac stellâ ejus latus ad occasum & boream min. 45 destitit. Lata autem erat cauda his diebus gradus 3, juxta terminum superiorem, ideoque medium ejus distabat à stellâ illâ 2gr. 15′ austrum versus, & terminus superior erat in ♓ 22gr. cum latitudine boreali 61gr. Et hinc longa erat cauda 70gr. circiter. *Dec.* 21. Eadem surgebat fere ad cathedram *Cassiopeiæ*, æqualiter distans à β & *Schedir*, & distantiam ab utrâque distantiæ earum ab invicem æqualem habens, ideoque desinens in ♈ 24gr. cum latitudine 47½gr. *Dec.* 29. Cauda tangebat *Scheat* sitam ad sinistram, & intervallum stellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accuratè complebat, & longa erat 54gr; ideoque desinebat in ♉ 19gr. cum latitudine 35gr. *Jan.* 5. Cauda tetigit stellam π in pectore *Andromedæ* ad latus ejus dextrum, & stellam μ in ejus cingulo ad latus sinistrum; & (juxta observationes nostras) longa erat 40gr.; curva autem erat & convexo latere spectabat ad austrum. Cum circulo per solem & caput cometæ transeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 graduum & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum octo. *Jan.* 13. Cauda luce satis sensibili terminabatur inter *Alamech* & *Algol*, & luce

ce tenuissimâ desinebat è regione stellæ κ in latere *Persei*. Distantia termini caudæ à circulo solem & cometam jungente erat 3gr. 50′, & inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum $8\frac{1}{2}$gr. *Jan.* 25 & 26. Cauda luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6 vel 7; & nocte unâ & alterâ sequente ubi cœlum valde serenum erat, luce tenuissimâ & ægerrimè sensibili attingebat longitudinem graduum duodecim & paulò ultra. Dirigebatur autem ejus axis ad lucidam in humero orientali aurigæ accuratè, ideoque declinabat ab oppositione solis boream versus in angulo graduum decem. Denique *Feb.* 10. caudam oculis armatis aspexi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. *Ponthæus* autem *Feb.* 7. se caudam ad longitudinem graduum 12 vidisse scribit. *Feb.* 25. & deinceps cometa sine caudâ apparuit.

Orbem jam descriptum spectanti & reliqua cometæ hujus phænomena in animo revolventi, haud difficulter constabit, quod corpora cometarum sunt solida, compacta, fixa ac durabilia ad instar corporum planetarum. Nam si nihil aliud essent quam vapores vel exhalationes terræ, solis & planetarum, cometa hicce in transitu suo per viciniam solis statim dissipari debuisset. Est enim calor solis ut radiorum densitas, hoc est, reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à sole. Ideoque cum distantiâ cometæ à centro solis *Decemb.* 8. ubi in perihelio versabatur, esset ad distantiam terræ à centro solis ut 6 ad 1000 circiter, calor solis apud cometam eo tempore erat ad calorem solis æstivi apud nos ut 1000000 ad 36, seu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis est quasi triplo major quam calor quem terra arida concipit ad æstivum solem, ut expertus sum: & calor ferri candentis (si (i) recte conjector) quasi triplo vel quadruplo major quàm calor

(i) * *Si rectè conjector.* Hanc Newtoni conjecturam experimenta confirmant. In transact. philosoph num. 270. describitur tabula caloris gradus exhibens. (Hujus tabulæ constructionem jam exposuimus in not. ad cor. 4. prop. 8. lib. 3.). Ex relatis ab autore experimentis colligitur calorem ferri, quantum levioris ignis auxilio fieri potuit, candefacti, circiter fuisse $2\frac{1}{2}$ majorem quam calor aquæ ebullientis. Hinc ignis vehementioris ope aucto calore ferri candentis, rectè conjectatur Newtonus calorem hujus ferri quasi triplo vel quadruplo majorem fieri quam calor aquæ ebullientis. 163:

calor aquæ ebullientis; ideoque calor, quem terra arida apud cometam in perihelio versantem ex radiis solaribus concipere posset, quasi 2000 vicibus major quam calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omnisque materia volatilis statim consumi ac dissipari debuissent.

Cometa igitur in perihelio suo calorem immensum ad solem concepit, & calorem illum diutissimè conservare potest. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem suum omnem spatio horæ unius in aëre consistens vix amitteret. Globus autem major calorem diutiùs conservaret in ratione diametri, propterea quod superficies (ad cujus mensuram per contactum aëris ambientis refrigeratur) in illa ratione minor est pro quantitate materiæ suæ calidæ inclusæ. Ideoque globus ferri candentis huic terræ æqualis, id est, pedes plùs minus 40000000 latus, diebus totidem, & idcirco annis 50000, vix refrigesceret. Suspicor tamen quod duratio caloris, ob causas latentes, augeatur in minore ratione quam ea diametri: (k) & optarim rationem veram per experimenta investigari.

Porro notandum est quod cometa mense *Decembri*, ubi ad solem modo incaluerat, caudam emittebat longe majorem & splendidiorem quam antea mense *Novembri*, ubi perihelium nondum attigerat. Et universaliter caudæ omnes maximæ & fulgentissimæ è cometis oriuntur statim post transitum eorum per regionem solis. Conducit igitur calefactio cometæ ad magnitudinem caudæ. (l) Et indè colligere videor quod cauda nihil aliud sit quam vapor longe tenuissimus, quem caput seu nucleus cometæ per calorem suum emittit. Cæ-

143. (k) * *Et optarim rationem veram.* Clariss. Hermannus Boerhaave in elementis Chemiæ, diligentissimis experimentis se invenisse refert eò diutiùs calorem in corporibus retineri quo majora sunt, cæteris paribus. Si autem corpora ejusdem diametri ejusdemque caloris, diversæ sint densitatis, quæ densiora sunt, caloris quoque sunt tenaciora; densitas enim ignem coercet, illiusque egressum ex intimis partibus retardat. Quia verò intimæ corporum partes innumeris modis variari atque inter se permisceri possunt, hinc patet in ipsâ caloris conservatione non leves varietates oriri posse. Hæ sunt fortasse latentes causæ quæ Newtonum in eam suspicionem induxerunt durationem scilicet caloris augeri in minori ratione quam eâ diametri.

(l) * *Et indè colligere videor.* Hanc sententiam pluribus argumentis deinceps confirmat Newtonus.

Cæterùm de cometarum caudis triplex est opinio; eas vel jubar esse solis per translucida cometarum capita propagatum, vel oriri ex refractione lucis in progressu ipsius à capite cometæ in terram, vel denique nubem esse seu vaporem à capite cometæ jugiter surgentem & abeuntem in partes à sole aversas. Opinio prima eorum est qui nondum imbuti sunt scientiâ rerum opticarum. Nam jubar solis in cubiculo tenebroso non cernitur, nisi quatenus lux reflectitur è pulverum & fumorum particulis per aërem semper volitantibus: ideoque in aëre fumis crassioribus infecto splendidius est, & sensum fortiùs ferit; in aëre clariore tenuius est & ægriùs sentitur: in cœlis autem sine materiâ reflectente nullum esse potest. Lux non cernitur quâtenus in jubare est, sed quâtenus inde reflectitur ad oculos nostros. Nam visio non fit nisi per radios qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione caudæ, ne cœlum totum luce solis illustratum uniformiter splendeat. Opinio secunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum solent esse comites inseparabiles. Lux fixarum & planetarum distinctè ad nos transmissa demonstrat medium cœleste nullâ vi refractivâ pollere. Nam quod dicitur fixas ab *Ægyptiis* comatas nonnunquam visas fuisse, id, quoniam rarissimè contingit, adscribendum est nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & scintillatio ad refractiones tum oculorum tum aëris tremuli referendæ sunt: quippe quæ admotis oculo telescopiis evanescunt. Aëris & ascendentium vaporum tremore fit, ut radii facilè de angusto pupillæ spatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi aperturâ neutiquam. Inde est quòd scintillatio in priori casu generetur, in posteriore autem cesset: & cessatio in posteriore casu demonstrat regularem transmissionem lucis per cœlos sine omni refractione sensibili. Nequis contendat quod caudæ non soleant videri in cometis, cum eorum lux non est satis fortis, quia tunc radii secundarii non habent satis virium ad oculos movendos, & propterea caudas fixarum non cerni: scien-

DE MUNDI SYSTEMATE.

(m) sciendum est quod lux fixarum plus centum vicibus augeri potest mediantibus telescopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copiosior est, caudæ verò nullæ: cometæ autem sæpe caudatissimi sunt, ubi capitum lux tenuis est & valde obtusa. Sic enim cometa anni 1680, mense *Decembri*, quo tempore caput luce suâ vix æquabat stellas secundæ magnitudinis, caudam emittebat splendore notabili usque ad gradus 40, 50, 60 vel 70 longitudinis & ultrà: postea *Jan.* 27 & 28 caput apparebat ut stella septimæ tantum magnitudinis, cauda verò luce quidem pertenui sed satis sensibili longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obscurissimâ, quæ cerni vix posset, porrigebatur ad gradum usque duodecimum vel paulò ultrà: ut supra dictum est. Sed & *Feb.* 9 & 10 ubi caput nudis oculis videri desierat, caudam gradus duos longam per telescopium contemplatus sum. Porro si cauda oriretur ex refractione materiæ cœlestis, & pro figurâ cœlorum deflecteretur de solis oppositione, deberet deflexio illa in iisdem cœli regionibus in eandem semper partem fieri. Atqui cometa anni 1680. *Decemb.* 28. hora $8\frac{1}{2}$. p. m. *Londini*, versabatur in ♓ 8gr. 41′, cum latitudine boreali 28gr. 6′, sole existente in ♑ 18gr. 26′. Et cometa anni 1577. *Dec.* 29 versabatur in ♓ 8gr. 41′ cum latitudine boreali 28gr. 40′, sole etiam existente in ♑ 18gr. 26′ circiter. Utroque in casu terra versabatur in eodem loco, & cometa apparebat in eâdem cœli parte: in priori tamen casu cauda cometæ (ex meis & aliorum observationibus) declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppositione solis aquilonem versus; in posteriore verò (ex observationibus *Tychonis*) declinatio erat graduum 21 in austrum. Igitur repudiatâ cœlorum refractione, superest ut phænomena caudarum ex materiâ aliquâ lucem reflectente deriventur.

Caudas autem à capitibus oriri & in regiones à sole aversas ascen-

163. (m) * *Sciendum est.* Ut notum est ex telescopiorum theoria apud omnes passim rerum opticarum & catoptricarum scriptores. Sed eâ potissimum legi merentur quæ de lucis intensitate, visionis distinctione & telescopiorum beneficiis dedit Clariss. Vir Robert Smith in eximio opere optico.

ascendere confirmatur ex (a) legibus quas observant. Ut quòd in planis orbium cometarum per solem transeuntibus jacentes, deviant ab oppositione solis in eas semper partes, quas capita in orbibus illis progredientia relinquunt. Quòd spectatori in his planis constituto apparent in partibus à sole directè aversis; digrediente autem spectatore de his planis, deviatio paulatim sentitur, & indies apparet major. Quòd deviatio cæteris paribus minor est ubi cauda obliquior est ad orbem cometæ, ut & ubi caput cometæ ad solem propiùs accedit; præsertim si spectetur deviationis angulus juxta caput cometæ: Præterea

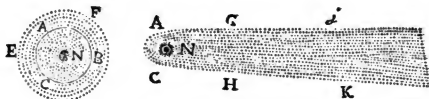
Liber Tertius. Prop. XI. Probl. XXI.

(a) 164. * *Ex legibus quas observant.* Leges illæ quas observant cometarum caudæ cum prædicta Newtoni sententiâ apprime congruunt. Cauda à cometæ capite vaporis instar in altum, id est, in partes à sole aversas assurgens in plano orbis cometæ per solem transeunte jacere debet; in æthere enim quieto nulla est ratio cur ad hanc potius quam ad illam partem deflectat. Quia autem vapor à capite exiens duos motus simul componit, alterum scilicet ascensus recti à sole, alterum verò progressus capitis, hinc fit ut cauda non directe à sole aversa sit, sed aliquantulum inde deviet in eas partes quas cometæ caput in orbe suo progrediens relinquit; si tamen spectator in orbis cometici plano per solem transeunte constituatur, deviatio caudæ neutquam sentitur, quia tota in plano isto jacet. Licet vapor assurgens motum capitis participet, tamen propter aliqualem ætheris resistentiam, minus velociter quam caput ipsum progreditur, & quò altius ascendit vapor eò fit rarior, id est, quò longior est cauda eò majorem experitur resistentiam, ideóque præcedens caudæ latus quod scilicet proximus est partibus ad quas tendit cometa, convexum erit, sequens verò concavum ac proindè cauda non à sole duntaxat aversa est, sed etiam incurvatur. Hæc à sole deviatio & curvatura eò minor est quò recta solem cometamque conjungens obliquior est ad cometæ orbitam; si enim cometa directè à sole vel ad solem tenderet, cauda quoque foret recta & à sole directè aversa. Hinc patet in ipso cometæ perihelio maximam esse caudæ deviationem maximamque curvaturam; tunc enim recta solem & cometam conjungens ad orbem cometæ normalis est. Præterea ob prædictam licet admodum exiguam ætheris resistentiam, convexa caudæ facies in ætherem incurrens densior est, ac proinde lucidior & distinctius terminata apparebit quam facies concava. Hæc sunt præcipua caudarum phænomena quibus satisfacit Newtoni opinio. Hinc caudas à capitibus oriri & in regiones à sole aversas ascendere confirmatur ex legibus quas observant. 165

165. Descriptis opinionibus de cometarum caudis adjungenda est illa quam Clariss. D. De Mairan in eximio opere de aurora Boreali his tuetur rationum momentis. Cometas ad solem proximè accedere observationibus compertum est; Hinc Newtonianæ attractionis legibus consentaneum videtur ut aliquam solaris atmosphæræ materiam cometa attrahat. Cur autem materia hæc instar comæ vento agitatæ dispergatur & ad solis oppositum dirigatur ex radiorum solarium impulsione oriri potest. Plurimis enim experimentis certum est solares radios omni prorsus impulsionis vi non carere. Clariss. Hombergius varia materiæ levissimæ filamenta radiis solaribus in vitri ustorii foco objecta notabiliter impelli observavit. Lamellam quoque elasticam ità ligneæ tabulæ affixit ut extremitas una liberè penderet, collectis vitri ustorii ope solaribus radiis expo-

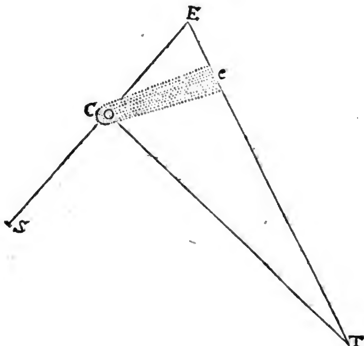
DE MUNDI SYSTEMATE.

terea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major eſt ubi major eſt deviatio, & magis ſenſibilis ubi cauda cæteris paribus longior eſt: nam in brevioribus curvatura ægrè animadvertitur. Quod deviationis angulus minor eſt juxta caput cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram, atque ideo quod cauda convexo ſui latere partes reſpicit à quibus fit deviatio, quæque in rectâ ſunt lineâ à ſole per caput cometæ in infinitum ductâ. Et quod caudæ quæ prolixiores ſunt & latiores, & luce vegetiore micant, ſint ad latera convexa paulo ſplendidiores & limite minus indiſtincto terminatæ quam ad concava. Pendent igitur phænomena caudæ à motu capitis, non autem à regione cœli in quâ caput conſpicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, ſed à capite ſuppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in aëre noſtro fumus corporis cujuſvis igniti petit ſupe-



165. expoſita hæc lamella inſtar penduli ſenſibiliter ibat & redibat. Quamvis autem leviſſima ſit hic apud nos radiorum ſolarium impulſio, maxima tamen eſſe poteſt in ſpatiis liberrimis in quibus cometæ deferuntur, præſertim cum tenuiſſima ſit materia quæ cometarum caudas componit. Jam vero concipiatur cometa N, apparenti cinctus atmoſphærâ EDF, in tranſitu ſcilicet prope ſolem collectâ, ita ut in majori à cometæ nucleo N, diſtantiâ levior rariorque ſemper fiat hæc materia, quemadmodum in apparenti cometarum atmoſphærâ ſolet obſervari. Sphæra interior ABC, ex iis ponatur conſtare particulis quæ radiorum ſolarium impulſioni poſſint reſiſtere, e contrà verò orbis ſuperior AFBDCE, leviores contineat particulas quæ huic impulſioni cedant, manifeſtum eſt radiorum ſolarium impulſione projici verſus ſolis oppoſitionem materiæ veſtigium BGHjK, quod figuram caudarum repræſentat. Ex dictis patet hanc ſententiam cum Newtonianis principiis conſentire; Et quamvis Newtonus deſcribens poſteà Kepleri opinionem quæ eadem ferè eſt, ab eâ non videtur alienus.

ſuperiora, idque vel perpendiculariter ſi corpus quieſcat, vel obliquè ſi corpus moveatur in latus: ita in cœlis, ubi corpora gravitant in ſolem, fumi & vapores aſcendere debent à ſole (uti jam dictum eſt) & ſuperiora vel recta petere, ſi corpus fumans quieſcit; vel obliquè, ſi corpus progrediendo loca ſemper deſerit à quibus ſuperiores vaporis partes aſcenderant. Et obliquitas iſta minor erit ubi aſcenſus vaporis velocior eſt: nimirum in vicinia ſolis & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diverſitate incurvabitur vaporis columna; & quia vapor in



166. Longitudo caudæ hoc modo poteſt inveniri. Sit S ſol, C cometa cujus cauda Ce; ex cognitis ſolis & cometæ locis notus erit angulus TCE, dataque (per obſerv.) deviatione caudæ à ſolis oppoſito, dabitur angulus ECe, ac proinde innoteſcet angulus TCe, quem ſcilicet cauda efficit cum rectâ terram & cometam jungente. Præterea (per obſerv.) innoteſcit angulus ad terram CTe, quem cauda ſubtendit, quare (per theoriam cometæ) datâ cometæ diſtantiâ à terrâ, dabitur caudæ longitudo. 172.

De Mundi Systemate.

in columnæ latere præcedente paulo recentior est, ideo etiam is ibidem aliquanto densior erit, lucemque propterea copiosius reflectet, & limite minus indistincto terminabitur. De caudarum agitationibus subitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque describunt, hic nihil adjicio; propterea quod vel à mutationibus aëris nostri, & motibus nubium caudas aliquâ ex parte obscurantium oriantur; vel forte à partibus viæ lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi possint, ac tanquam earum partes spectari.

Vapores autem, qui spatiis tam immensis implendis sufficiant, ex cometarum atmosphæris oriri posse, intelligetur ex raritate aëris nostri. Nam aër juxta superficiem terræ spatium occupat quasi 850 partibus majus quàm aqua ejusdem ponderis, ideoque aëris columna cylindrica pedes 850 alta ejusdem est ponderis cum aquæ columna pedali latitudinis ejusdem. Columna autem aëris ad summitatem atmosphæræ assurgens æquat pondere suo columnam aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea si

167. 167. Novam elegantemque methodum ad cometarum motus in orbe parabolico computandos nobiscum, suá humanitate, communicavit Clariss. Vir & in rebus Mathematicis Versatissimus D. De Chezeaux. Methodum hanc describere longius foret, paucis duntaxat exponemus quá ratione longitudinem atque deviationem caudæ investigat. Sit cometa in puncto G circà quod tanquam centrum describatur sphæra cujus radii G A, G E, sint æquales longitudini caudæ cometæ. Concipiatur in hac sphærá planum Eclipticæ parallelum habens polos in D & H, itemque concipiatur planum A K E B parallelum orbitæ veræ cometæ habens polum unum in G, sit terra in M, ejus longitudo e cometá visa & ad planum orbitæ A K E B reducta, exprimetur per arcum K B, latitudo autem per arcum K j. Quia verò datur (per observ.) longitudo cometæ e terrá visa, dabitur longitudo terræ e cometá visa; sed datur latitudo cometæ (per observ.) & (per theoriam cometæ) habetur inclinatio plani A K E B, ad planum Eclipticæ, itemque innotescit locus nodi B. Quare (per trigon sphær.) invenietur longitudo terræ respectu plani AKEB, cujus mensura est arcus B N A K, dabiturque latitudo K j. Jam verò ductá lineá M E, ex terrá M, ad extremitatem caudæ E, cujus extremitatis longitudo & latitudo e terra visæ (per observ.) notæ sunt, agatur G F parallela rectæ E M, eodem plane modo ac suprà innotescet positio puncti F in superficie sphæræ respectu plani A K E B, descriptoque arcu circuli maximi G F L, invenientur arcus B N A L & F L. Sed in triangulo sphærico G j F, datis latere G j, complemento scilicet ad j K, & latere G F, complemento ad F L, atque latere F j, mensurá anguli F G j, qui æqualis est angulo G M E, invenietur angulus G F j. Tandem concipiatur planum circuli maximi transiens per puncta F, j, per centrum G, commune sphæræ & cometæ atque per extremitatem caudæ E, cujusque sectio cum plano A N B, sit recta F G Æ, formabitur alterum triangulum sphæricum Æ F L, cujus

si columnæ totius aëreæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua superior æquabit pondere suo columnam aquæ altam pedes 32. Indè verò (per regulam (b) multis experimentis confirmatam, quod compressio aëris sit ut pondus atmosphæræ incumbentis, quodque gravitas sit reciprocè ut quadratum

LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.

N D A G E B Æ F L j K H M

jus jam innotescunt angulus ÆFL & latus FI, quare dabitur latus ÆL, ac proindè etiam dabitur arcus BAÆ, ob datum arcum BAL; innotescet præterea arcus BE, atque obtinebitur arcus ÆF, qui additus arcui Fj, dabit arcum Æj, ideóque dabitur arcus Ej, mensura anguli rectilinei jGE, vel MGE. Datis autem in triangulo rectilineo MGE, angulis MGE, GME & latere GM, dabitur latus GE, hoc est, longitudo caudæ. Si itaque habeatur distantia cometæ à terrá in partibus mediocris distantiæ terræ á sole expressa, in iisdem quoqué partibus obtinebitur longitudo caudæ. Quoniam verò (ex theoriá cometæ) datur distantia cometæ à nodo ex sole visa, si ex hâc distantiá subtrahatur arcus BE, habebitur angulus quem recta per solem & cometam ducta comprehendit cum caudá GE, hoc est, deviatio cometæ à sole. 167.

(b) * *Multis experimentis confirmatam.* Experimenta illa referunt passim rerum Physicarum scriptores, sed præterim Clariss. Muskenbroek in Physicá. Videantur etiam transactiones Philosophicæ an. 1671, num. 73.

De Mundi Systemate.

dratum distantiæ locorum à centro terræ) computationem (c) per corol. prop. XXII. lib II. ineundo, inveni quod aër, si ascendatur à superficie terræ ad altitudinem semidiametri unius terrestris, rarior sit quam apud nos in ratione longè majori, quam spatii omnis infra orbem saturni ad globum diametro digiti unius descriptum. Ideoque globus aëris nostri digitum unum latus, eâ cum raritate quam haberet in altitudine semidiametri unius terrestris, impleret omnes planetarum regiones usque ad sphæram saturni & longè ultrà. Proindè cum aër adhuc altior in immensum rarescat; & coma seu atmosphæra cometæ, ascendendo ab illius centro, quasi decuplo altior sit quam superficies nuclei deinde cauda adhuc altius ascendat, debebit cauda esse quàm rarissima. Et quamvis ob longè crassiorem cometarum atmosphæram, magnamque corporum gravitationem solem versus, & gravitationem particularum aëris & vaporum in se mutuò, fieri possit ut aër in spatiis cœlestibus inque cometarum caudis non adeò rarescat; perexiguam tamen quantitatem

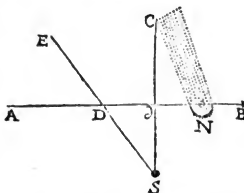
168. (c) 168. * *Per corol. prop. XXII.* Sit (in figurâ prop. XXII.) S centrum terræ, SA ejusdem semidiameter mediocris pedum $19615800 = r$, AB pedum 850, & ideò $SP = 19616650 = a$, $SF = 2r$, dignitas hyperbolæ $fah = rr$, ideóque $Aa = r$, $Ff = \frac{1}{2}r$, & $Bb = \frac{rr}{a}$ ac proindè $Aa - Ff = \frac{1}{2}r$ & $Aa - Bb = \frac{ar - rr}{a}$. Densitas AH seu $St = m = 33$, densitas Bj, seu $Su = n = 32$, & densitas FN, sive $SZ = d$. His positis, (ex naturâ hyperbolæ per theor. 4. de hyperbola). erit area thnz, ad aream thiu, ut L. $\frac{m}{d}$ ad L. $\frac{m}{n}$, & (per Cor. Prop. XXII. lib. 2.) erit L. $\frac{m}{d}$: L. $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}r : \frac{ar-rr}{a} = a : 2a - 2r$, ideóque L. $\frac{m}{d} = \frac{a}{2a-2r} \times$ L. $\frac{33}{32}$. Est autem $\frac{a}{2a-2r} = \frac{1961665}{170}$, & ex tabulis vulgaribus L. $\frac{33}{32} = 0.0133639$. Quarè L. $\frac{m}{d} = 154.20879349$. Densitas ergò aeris in A seu in superficie telluris se habet ad densitatem aeris in F, seu in distantiâ semidiametri telluris ab eâdem superficie ut numerus respondens logarithmo 154.20879349 ad unitatem. Porro logarithmo 3.2087100 in tabulis vulgaribus respondet numerus 1617 & ideò logarithmo 3.20879349 respondere debet numerus unitate fere integrâ major quam 1617. Logarithmo igitur invento 154.20879349 respondet numerus major quam 1617 cum 151 zeris adscriptis. Jam verò semidiameter terræ sit ut prius 19615800 pedum parallaxis solis ponatur 10″ cujus sinus rectus est partium 485 posito radio partium 10000000. Quoniam semidiameter orbis magni est ad semidiametrum terræ ut radius ad sinum parallaxis solis (30. lib. 3.) erit semidiameter orbis magni pedum circiter 50000000000000. Sed semidiameter orbis Saturni circiter decuplo major est (phæn. 4.) erit igitur hæc semidiameter pedum

tatem aëris & vaporum ad omnia illa caudarum phænomena abundè sufficere, ex hac computatione perspicuum est. Nam & caudarum insignis raritas colligitur ex astris per eas translucentibus. Atmosphæra terrestris luce solis splendens, crassitudine suâ paucorum milliarium, & astra omnia & ipsam lunam obscurat & extinguit penitus: per immensam verò caudarum crassitudinem, luce pariter solari illustratam, astra minima sine claritatis detrimento translucere noscuntur. Neque major esse solet caudarum plurimarum splendor, quam aëris nostri in tenebroso cubiculo latitudine digiti unius duorumve lucem solis in jubare reflectentis.

Quo temporis spatio vapor à capite ad terminum caudæ ascendit, (d) cognosci ferè potest ducendo rectam à termino caudæ

pedum 50000000000000, ideóque diameter ped. 100000000000000, sive digitorum 1200000000000000. Est igitur sphæra Saturni ad globum cujus diameter est digitus unus ut præcedentis numeri cubus sive 1728 cum annexis 39 cyphris ad unitatem; sed ratio illa multo minor est ratione densitatum modò inventâ; Quarè globus aëris nostri digitum unum latus eâ cum raritate quam haberet in altitudine semidiametri unius terrestris impleret omnes planetarum regiones usque ad sphæram Saturni & longe ultrà.

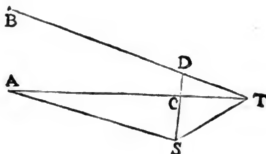
(d) 169. * *Cognosci ferè potest.* Referat S solem, A B trajectoriæ cometicæ portionem. Sit N cometæ nucleus ab A versus B progrediens, C terminus caudæ. Ducatur recta à termino illo C ad solem, punctum d, ubi recta trajectoriam secat, designabit locum ex quo vapor in termino caudæ ascendere cæpit à capite, si vapor ille rectà ascendat à sole. Quia autem vapor non rectà ascendit à sole sed vergit versus partes A, quas cometa reliquit (164.) agatur recta SE, parallela longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum cometæ) recta illa à lineâ caudæ divergat, atque trajectoriam cometæ alicubi intersecet putà in D, vapor qui nunc terminum caudæ constituit à nucleo cœpit ascendere dum cometa in trajectoriæ suæ loco D versabatur; hic 168.
enim vapor cum motu ascensûs à sole, motum cometæ progressivum quem ante ascensum suum habebat, componit. Sed per varias methodos paulò ante explicatas in-



veniri potest tempus quo cometa locum D occupavit & potest definiri quanto temporis spatio opus sit ut cometa trajectoriæ portionem D N, longitudine datam, percurrat, ideóque habebitur proximè tempus quo vapor ad terminum caudæ ascendit. Simili modo determinari potest temporis spatium quo vapor ascendit ad datum caudæ punctum.

De Mundi Systemate.

dæ ad ſolem, & notando locum ubi recta illa trajectoriam ſecat. Nam vapor in termino caudæ, ſi recta aſcendat à ſole, aſcendere cœpit à capite, quo tempore caput erat in loco interſectionis. At vapor non rectà aſcendit a ſole, ſed motum cometæ, quem ante aſcenſum ſuum habebat, retinendo, & cum motu aſcenſus ſui eundem componendo, aſcendit obliquè. Unde verior erit problematis ſolutio, ut recta illa, quæ orbem ſecat, parallela ſit longitudini caudæ, vel potiùs (ob motum cur-



170. 170. Ex his quæ de cometarum caudis hactenus dicta ſunt, cometarum, quandiù nobis conſpicui ſunt, maxima poſſibilis diſtantia à ſole & terrà definiri poteſt. Referat S ſolem, T terram, S T A diſtantiam cometæ à ſole, ſitque A T B, apparens longitudo caudæ. Quoniam lux propagatur à termino caudæ ſecundùm lineam rectam T B, reperitur terminus ille alicubi in lineà T B, putà in D. Jungatur D S, ſecans lineam T A in C, & quia cauda ſemper opponitur ſoli quam proxime, ideóque ſol, caput cometæ & terminus caudæ jacent in directum, reperitur caput cometæ in C. Rectæ T B, agatur parallela S A, occurrens lineæ TA, in A, caput cometæ C neceſſariò reperietur inter T & A, nam terminus caudæ reperitur alicubi in lineà infinità T B, & lineæ omnes ut S D, quæ ab S ad lineam T B duci poſſunt, ſecant lineam T A, alicubi inter T & A. Quare cometa non poteſt longius abeſſe à terrâ quam intervallo T A, nec à ſole quam intervallo S A ultrà ſolem, vel ST, citrà. Exemplo ſit cometa an. 1680. cometa ille die 12. Dec. diſtabat 9°. à ſole & longitudo caudæ erat 35°. Quare conſtituatur triangulum TSA, cujus angulus T æqualis ſit diſtantiæ 9°. & angulus A ſeu angulus A T B æqualis ſit longitudini caudæ 35°, erit S A ad ST, id eſt, limes maximæ poſſibilis diſtantiæ cometæ a ſole ad ſemidiametrum orbis magni ut ſinus anguli T, ad ſinum anguli A, hoc eſt, ut 3. ad 11. circiter. Quarè cometa eo tempore minùs diſtabat à ſole quam $\frac{3}{11}$ partibus diſtantiæ terræ à ſole, & propterea verſabatur aut intrà orbem

curvilineum cometæ) ut eadem à linea caudæ divergat. Hoc pacto inveni quod vapor, qui erat in termino caudæ *Jan.* 25. ascendere cœperat à capite ante *Dec.* 11. ideóque ascensu suo toto, dies plus 45 consumpserat. At cauda illa omnis quæ *Dec.* 10 apparuit, ascenderat spatio dierum illorum duorum, qui à tempore perihelii cometæ elapsi fuerant. Vapor igitur sub initio in viciniâ solis celerrimè ascendebat, & postea cum motu per gravitatem suam semper retardato ascendere pergebat; & ascendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem, quamdiù apparuit, ex vapore ferè omni constabat, qui à tempore perihelii ascenderat; & vapor, qui primus ascendit, & terminum caudæ composuit, non prius evanuit quam ob nimiam suam tam à sole illustrante quam ab oculis nostris distantiam videri desiit. Unde etiam caudæ cometarum aliorum, quæ breves sunt, non ascendunt motu celeri & perpetuò à capitibus & mox evanescunt, sed sunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, à capitibus lentissimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum quem habuere sub initio, per cœlos unà cum capitibus moveri pergunt. Et (e) hinc rursus colligitur spatia cœlestia vi resistendi destitui; utpote in quibus non solum solida planetarum & cometarum corpora, sed etiam rarissimi caudarum vapores motus suos velocissimos liberrimè peragunt ac diutissimè conservant.

Ast

bem Mercurii aut inter orbem illum & terram. Rursus die 21. Decembr. distantia cometæ à sole erat $32^\circ \frac{2}{5}$. & longitudo caudæ 70°. ergò ut sinus $32^\circ \frac{2}{5}$. ad sinum 70°, hoc est, ut 4 ad 7, ità erat limes intervalli inter cometam & solem ad distantiam terræ à sole & propterea nondum cometa excesserat ex orbe veneris. Die 28. Decembr. distantia cometæ à sole erat 55°. & longitudo caudæ 56°. Quare, iisdem calculi vestigiis insistendo, limes intervalli inter cometam & solem, nondum æquabat distantiam terræ à sole & propterea cometa nondum excesserat ex orbe telluris. Hâc methodo quam ex Newtoni opusculo de mundi systemate descripsimus, aliorum cometarum distantias limitando inventum est cometas omnes, quandiu se nobis ostendunt, versari intrà spatium sphæricum centro sole & intervallo solis ac terræ vel duplicato vel ad summum triplicato descriptum. 1706

(e) * *Et hinc rursùs colligitur.* Legantur quæ dicta sunt in scholio prop. XI. lib. 2.

DE MUNDI SYSTEMATE. Ascensum caudarum ex atmosphæris capitum & progressum in partes à sole aversas *Keplerus* ascribit actioni radiorum lucis materiam caudæ secum rapientium. Et auram longè tenuissimam in spatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non est à (f) ratione prorsus alienum, non obstante quod substantiæ crassæ impeditissimis in regionibus nostris à radiis solis sensibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quam graves dari posse existimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem suam à sole ascendere. Cum autem gravitas corporum terrestrium sit ut materia in corporibus, ideóque servatâ quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, suspicor ascensum illum ex rarefactione materiæ caudarum potiùs oriri. Ascendit fumus in camino impulsu aëris cui innatat. Aër ille per calorem rarefactus ascendit, ob diminutam suam gravitatem specificam, & fumum implicatum rapit secum. Quidni cauda cometæ ad eundem modum ascenderit à sole? Nam radii solares non agitant media, quæ permeant, nisi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes eâ actione calefactæ calefacient auram æthercam cui implicantur. Illa calore sibi communicato rarefiet, & ob diminutam eâ raritate gravitatem suam specificam, quâ priùs tendebat in solem, ascendet & secum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: Ad ascensum vaporum conducit etiam, quod hi gyrantur circa solem & eâ actione conantur à sole recedere, at solis atmosphæra & materia cœlorum vel planè quiescit, vel motu solo quem à solis rotatione acceperit, tardius gyratur. Hæ sunt causæ ascensus caudarum in viciniâ solis, ubi orbes curviores sunt, & cometæ intra densiorem & eâ ratione graviorem solis atmosphæram consistunt, & caudas quàm longissimas mox emittunt. Nam caudæ, quæ tunc nascuntur, conservando motum suum & interea versus solem gravitando, movebuntur circa solem in ellipsibus pro more capitum, & per motum illum capita semper comitabuntur & iis liberrimè adhærebunt. Gravitas enim vaporum in

170. (f) * Non est a ratione prorsus alienum (165.).

in solem non magis efficiet ut caudæ postea decidant à capitibus solem versus, quam gravitas capitum efficere possit, ut hæc decidant à caudis. Communi gravitate vel simul in solem cadent, vel simul in ascensu suo retardabuntur; ideoque gravitas illa non impedit, quò minùs caudæ & capita positionem quamcunque ad invicem à causis jam descriptis, aut aliis quibuscunque facillimè accipiant & postea liberrimè servent.

Caudæ igitur, quæ in cometarum periheliis nascuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel indè post longam annorum seriem cum iisdem ad nos redibunt, vel potius ibi rarefactæ paulatim evanescent. Nam postea in descensu capitum ad solem caudæ novæ breviusculæ lento motu à capitibus propagari debebunt, & subindè in periheliis cometarum illorum, qui ad usque atmosphæram solis descendent, in immensum augeri. Vapor enim in spatiis illis liberrimis perpetuò rarescit ac dilatatur. Quâ ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem superiorem latior sit quam juxta caput cometæ. Eâ autem rarefactione vaporem perpetuò dilatatum diffundi tandem & spargi per cœlos universos, deindè paulatim in planetas per gravitatem suam attrahi, & cum eorum atmosphæris misceri rationi consentaneum videtur. Nam quemadmodum maria ad constitutionem terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem solis vapores copiosè satis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condensati (ut (g) aliqui cum ratione philosophantur) decurrant in fontes & flumina: sic ad conservationem marium & humorum in planetis requiri videntur cometæ, ex quorum exhalationibus & vaporibus condensatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem consumitur & in terram aridam convertitur, continuò suppleri & refici possit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omninò crescunt, dein magnâ ex

(g) * *Ut aliqui cum ratione philosophantur.* Horumce philosophorum rationes videre est passim apud omnes cultiores physicos. Legantur transact. philosop. an. 1667. 1694. 1729 & mem. Acad. Paris. an. 1703. 170.

ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuò decidit. Hinc moles terræ aridæ in dies augetur, & liquores, nisi aliunde augmentum sumerent, perpetuò decrescere deberent, ac tandem deficere. Porrò suspicor spiritum illum, qui aëris nostri pars minima est sed subtilissima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex cometis præcipuè venire.

Atmosphæræ cometarum in descensu eorum in solem excurrendo in caudas, diminuuntur, & (eâ certè in parte quæ solem respicit) angustiores redduntur: & vicissim in recessu eorum à sole, ubi jam minus excurrunt in caudas, ampliantur; si modo phænomena eorum *Hevelius* rectè notavit. Minimæ autem apparent, ubi capita jam modo ad solem calefacta in caudas maximas & fulgentissimas abiere, & nuclei fumo forsan crassiore & nigriore in atmosphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus crassior & nigrior esse solet. Sic caput cometæ, de quo egimus, in æqualibus à sole ac terrâ distantiis obscurius apparuit post perihelium suum quam antea. Mense enim *Decembri* cum stellis tertiæ magnitudinis conferri solebat, at mense *Novembri* cum stellis primæ & secundæ. Et qui utrumque viderant, majorem describunt cometam priorem. Nam juveni cuidam *Cantabrigiensi*, *Novem.* 19. cometa hicce luce suâ quantumvis plumbeâ & obtusâ, æquabat spicam virginis, & clarius micabat quam postea. Et *Montenaro Nov.* 20, st. vet. cometa apparebat major stellis primæ magnitudinis, existente caudâ duorum graduum longitudinis. Et *D. Storer* literis, quæ in manus nostras incidere, scripsit caput ejus mense *Decembri*, ubi caudam maximam & fulgentissimam emittebat, parvum esse & magnitudine visibili longè cedere cometæ, qui mense *Novembri* ante solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem esse conjectabatur, quod materia capitis sub initio copiosior esset, & paulatim consumeretur.

Eodem spectare videtur, quod capita cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentissimas emiserunt, apparuerint subobs-

obscura & exigua. Nam anno 1668. *Mart.* 5. st. nov. horâ septimâ vespertinâ *R. P. Valentinus Estancius*, *Brasiliæ* agens, cometam vidit horizonti proximum ad occasum solis brumalem, capite minimo & vix conspicuo, caudâ verò suprà modum fulgente, ut stantes in littore speciem ejus è mari reflexam facilè cernerent. Speciem utique habebat trabis splendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in austrum vergens, & horizonti ferè parallela. Tantus autem splendor tres solùm dies durabat, subindè notabiliter decrescens; & interea decrescente splendore aucta est magnitudine cauda. Undè etiam in *Lusitania* quartam ferè cœli partem (id est, gradus 45) occupasse dicitur ab occidente in orientem splendore cum insigni protensa; nec tamen tota apparuit, capite semper in his regionibus infrà horizontem delitescente. Ex incremento caudæ & decremento splendoris manifestum est, quod caput à sole recessit, eique proximum fuit initio, pro more cometæ anni 1680. Et in chronico *Saxonico* similis legitur cometa anni 1106. *cujus stella erat parva & obscura* (ut ille anni 1680) *sed splendor qui ex ea exivit valde clarus & quasi ingens trabs ad orientem & aquilonem tendebat*, ut habet etiam *Hevelius* ex *Simeone Dunelmensi* Monacho. Apparuit initio mensis *Februarii*, ac deinceps circa vesperam, ad occasum solis brumalem. Indè verò & ex situ caudæ colligitur caput fuisse soli vicinum. *A sole*, inquit *Matthæus Parisiensis*, *distabat quasi cubito uno*, *ab horâ tertiâ* (rectius sextâ) *usque ad horam nonam radium ex se longum emittens.* Talis etiam erat ardentissimus ille cometa ab *Aristotele* descriptus lib. 1. Meteor. 6. *cujus caput primo die non conspectum est, eo quod ante solem vel saltem sub radiis solaribus occidisset, sequente vero die quantum potuit visum est. Nam quam minima fieri potest distantia solem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem* (caudæ scilicet) *nondum apparebat capitis sparsus ignis, sed procedente tempore* (ait Aristoteles) *cum* (cauda) *jam minus flagraret, reddita est* (capiti) *cometæ sua facies. Et splendorem suum ad tertiam usque cœli partem* (id est, ad 60gr.) *extendit. Apparuit autem tempore hyberno* (an. 4. olymp. 101.) *& ascendens*

dens

dens usque ad cingulum orionis ibi evanuit. Cometa ille anni 1618, qui è radiis solaribus caudatissimus emersit, stellas primæ magnitudinis æquare vel paulo superare videbatur, sed majores apparuere cometæ non pauci, qui caudas breviores habuere. Horum aliqui jovem, alii venerem vel etiam lunam æquasse traduntur.

(h) Diximus cometas esse genus planetarum in orbibus valde eccentricis circa solem revolventium. Et quemamodum è planetis non caudatis minores esse solent, qui in orbibus minoribus & soli propioribus gyrantur, sic etiam cometas, qui in perihehis suis ad solem propiùs accedunt, ut plurimum minores esse, ne solem attractione suâ nimis agitent, rationi consentaneum videtur. (i) Orbium verò transversas diametros & revolutionum tempora periodica, ex collatione cometarum in iisdem orbibus post longa temporum intervalla redeuntium, determinanda relinquo. Interea huic negotio propositio sequens lumen accendere potest.

PRO-

171. (h) 171. * *Diximus cometas esse genus planetarum*, idque gravissimis rationibus confirmatur. Hâc enim factâ hypothesi, computatisque per methodos præcedentes cometarum trajectoriis, hujusmodi trajectoriæ semper cum phænomenis congruunt quamproxime. Clariss. Halleius suspicatur cometam an. 1531. ab Appiano observatum, eundem fuisse cum illo qui anno 1607 descriptus est à Keplero & Longomontano & quem Halleius ipse redeuntem observavit an. 1682. quadrabant enim elementa omnia, solaque periodorum inæqualitas adversari videbatur. Verum tanta non fuit inæqualitas illa ut causis physicis adscribi non possit. Saturni enim motus à cæteris planetis & præsertim à jove ità perturbatur ut per aliquot dies integros incertum sit hujus planetæ tempus periodicum. Rectè etiam animadvertit Clariss. Cassinus in Mon. Paris. 1699. cometam diversis temporibus observatum ideóque pro duobus cometis usurpatum, unum eundemque esse posse, licet non conveniant inter se omnia motuum elementa; fieri scilicet potest ut unus idemque cometa bis observatus non secet Eclipticam sub eodem angulo & in iisdem locis, ut cometæ hujus velocitas in perigæo non sit eadem. Talibus enim erroribus aliisque plurimis Luna est obnoxia. Cæterum Clariss. Halleius diligenter perpensis motibus cometæ an. 1682. hujus cometæ reditum anno 1758. futurum esse prædixit.

(i) * *Orbium verò transversas diametros & revolutionum tempora periodica.* Hæc duo obtineri possunt per methodum num 160. expositam.

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXII.

Inventam cometæ trajectoriam corrigere.

Operatio 1. Assumatur positio plani trajectoriæ, per propositionem superiorem inventa; & seligantur tria loca cometæ observationibus accuratissimis definita, & ab invicem quàmmaximè distantia; sitque A tempus inter primam & secundam, ac B tempus inter secundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo (k) in perigæo versari convenit, vel saltem non longè à perigæo abesse. (l) Ex his locis apparentibus inveniantur, per operationes trigonometricas, loca tria vera cometæ in assumpto illo plano trajectoriæ. Deindè per loca illa inventa, circa centrum solis ceu umbilicum, per operationes arithmeticas, ope prop. XXI lib. 1. institutas, describatur sectio conica: (m) & ejus areæ, radiis à sole ad loca inventa ductis terminatæ, sunto D & E; nempe D area inter observationem pri-

(k) * *In perigæo versari convenit.* Versante enim cometa in perigæo vel saltem non longe à perigæo, illius motus magis accurate definitur.

(l) * *Ex his locis apparentibus.* Inveniantur per operationes trigonometricas (ut in prop. præced.) loca tria vera cometæ in assumpto illo plano trajectoriæ tanquam accurato, hoc est, inveniantur tria prius definiti plani puncta in quibus cometa eandem longitudinem ac latitudinem obtineret quam reverà habere observatur.

(m) * *Ejus areæ.* Ex datâ cometæ semitâ ejusque partium magnitudine respectu semitæ telluris ejusque partium, dabitur velocitas quâ cometa illam describit ideóque dabitur tempus quo cometa areas duas jam inventas percurrit. Tempus illud totum dicatur T, capiaturque numerus C, qui sit ad 1, ut tempus inter observationem primam & secundam ad tempus inter observationem secundam & tertiam, hoc est, ut A ad B. Sumatur præterea G ad 1, ut areæ inter observationem primam & secundam ad aream inter observationem secundam & tertiam, id est, ut D ad E; eadem quoque erit ratio inter tempora quibus areæ illæ radiis ad solem ductis describentur. Sit S, tempus verum inter observationem primam & tertiam. Si reperiatur T = S, & G = C, inventa plani trajectoriæ positio vera erit & accurata, nullâ indigens correctione. Sin aliter erit T — S, error in tempore toto inter observationem primam & tertiam ortus nimirum ex positione plani trajectoriæ minus accuratâ, & G — C, erit error ex eâdem causâ ortus in ratione temporis inter observationem primam & secundam, ad tempus inter observationem secundam & tertiam, ut patet; nam in utroque casu unitas usurpatur pro consequente rationis inter bina tempora.

1718.

primam & ſecundam, & E area inter ſecundam ac tertiam. Sitque T tempus totum, quo area tota D+E velocitate cometæ per prop. XVI. lib. I. inventa deſcribi debet.

Oper. 2. (n) Augeatur longitudo nodorum plani trajectoriæ, additis ad longitudinem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur P; & ſervetur plani illius inclinatio ad planum eclipticæ. Deinde ex prædictis tribus cometæ locis obſervatis, inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, ut ſuprà: deinde etiam orbis per loca illa tranſiens, & (o) ejuſdem areæ duæ inter obſervationes deſcriptæ, quæ ſint d & e, nec non tempus totum t, quo area tota $d+e$ deſcribi debeat.

Oper. 3. Servetur longitudo nodorum in operatione primâ, & augeatur inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur Q. Deinde ex obſervatis prædictis tribus cometæ locis apparentibus inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, orbiſque per loca illa tranſiens, (p) ut & ejuſdem areæ duæ inter obſervationes deſcriptæ, quæ ſint δ & ε, & tempus totum τ, quo area tota $\delta+\varepsilon$ deſcribi debeat.

(q) Jam ſit C ad 1 ut A ad B, & G ad 1 ut D ad E, & g ad 1 ut d ad e, & γ ad 1 ut δ ad ε; ſitque S tempus verum inter

171. (n) * *Longitudo nodorum*, per num. 145. inventa

(o) * *Et ejuſdem areæ duæ.* Harumce arearum inter tres obſervationes radiis ad ſolem ductis deſcriptarum ratio ſit ut g, ad 1; ſitque t, tempus totum quo cometa utramque aream deſcriberet. Si deprehendatur t=S & g=C, aſſumpta plani poſitio vera erit & accurata. Sin aliter, erit, ut ſupra in operatione 1ª, t—S, error in tempore toto inter obſervationem primam & tertiam, & g—C error in ratione temporis inter obſervationem primam & ſecundam ad tempus inter obſervationem ſecundam & tertiam. Uterque hic error oritur ex poſitione non ſatis accuratâ plani trajectoriæ ad planum Eccliptícæ.

(p) * *Ut & ejuſdem areæ duæ.* Sint areæ illæ ut γ ad 1, ſitque τ tempus totum quo area tota $\delta+\varepsilon$, deſcribi debeat. Si fuerit $\tau=S$ & $\gamma=C$, aſſumpta plani trajectoriæ poſitio vera eſt & accurata. Sin contrà, erit $\tau-S$, error in tempore toto inter obſervationem primam & tertiam, & $\gamma-C$, error in ratione temporis inter obſervationem primam & ſecundam ad tempus inter obſervationem ſecundam & tertiam.

(q) * *Jam ſit C ad 1.* Iiſdem ſervatis denominationibus quas adhibet Newtonus, inſtituatur operatio per regulam falſæ poſitionis. Ad inveniendum errorem ortum ex aſſumptâ inclinatione plani trajectoriæ ad planum Eccliptícæ, fiat juxta prædictam regulam, ut differentia errorum $T-\tau$ ad differentiam poſitionum T—S, ità

ter observationem primam ac tertiam; & signis + & − probè observatis quærantur numeri m & n, eâ lege, ut fit $2G-2C = mG - mg + nG - n\gamma$, & $2T-2S$ æquale $mT - mt + nT - n\tau$. Et si in operatione primâ I designet inclinationem plani trajectoriæ ad planum eclipticæ & K longitudinem nodi alterutrius, erit $I + nQ$ vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, & $K + mP$ vera longitudo nodi. (r) Ac denique si in operatione primâ, secundâ ac tertiâ, quantitates R, r & ϱ designent latera recta trajectoriæ, & quantitates $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ ejusdem latera transversa respectivè: erit $R + mr - mR + n\varrho - nR$ verum

ità error Q, ad quartam quantitatem, erit hæc ipsa quantitas $\frac{T-S}{T-\tau} \times Q$, error inclinationis plani in toto scilicet tempore inter observationem primam & tertiam. Simili modo dicatur, $G-\gamma : G-C = Q : \frac{G-C}{G-\gamma} \times Q$, erit quantitas $\frac{G-C}{G-\gamma} \times Q$ error ejusdem inclinationis in ratione inter bina trium observationum tempora. Similiter error longitudinis nodi in toto tempore inter observationem primam & tertiam invenitur $\frac{T-S}{T-t} \times P$, error verò in ratione inter bina tempora est $\frac{G-C}{G-g} \times P$. Est itaque vera & correcta inclinatio plani trajectoriæ ad planum Fcclipticæ $I + \frac{T-S}{T-\tau} \times Q$, sive $I + \frac{G-C}{G-\gamma} \times Q$; & vera longitudo nodi est $K + \frac{T-S}{T-t} \times P$ vel $K + \frac{G-C}{G-g} \times P$. Jam verò quoniam corrigendus est error uterque tam in toto tempore quam in ratione inter bina tempora, ponamus $\frac{T-S}{T-t} \times P$ & $\frac{G-C}{G-g} \times P$, separatim æquari $m \times P$ hoc est $\frac{T-S}{T-t} = m$ & $\frac{G-C}{G-g} = m$.

Ponamus quoque $\frac{T-S}{T-\tau} \times Q$ & $\frac{G-C}{G-\gamma} \times Q = n \times Q$, id est $\frac{T-S}{T-\tau} = n$, & $\frac{G-C}{G-\gamma} = n$. Hinc proveniet $mT - mt = T - S$ & $mG - mg = G - C$; item $nT - n\tau = T - S$, & $nG - ng = G - C$, unde fit $2T - 2S = mT - mt + nT - n\tau$, & $2G - 2C = mG - mg + nG - n\gamma$. Quare si tales quærantur numeri m & n, ut sit $2G - 2C = mG - mg + nG - n\gamma$, & $2T - 2S = mT - mt + nT - n\tau$, erit $\frac{T-S}{T-\tau} \times Q$ & $\frac{G-C}{T-\tau} \times Q = n \times Q$. Similiter fiet $\frac{T-S}{T-t} \times P$ & $\frac{G-C}{G-g} \times P = mP$, ac proindè error inclinationis plani trajectoriæ erit nQ & error longitudinis nodi mP. Quarè vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ erit $I + nQ$, & $K + mP$ vera longitudo nodi. Hæc omnia patent ex notis in tres operationes præcedentes. 171.

(r) * *Ac denique.* Nota sint latera recta trium trajectoriarum in operatione primâ, secundâ & tertiâ descriptarum. Designet R, latus rectum primæ trajectoriæ, r secundæ, ϱ tertiæ, & trajectoriæ quam cometa describit desideretur verum latus rectum; per regulam falsæ positionis eâdem plane methodo quam modò adhibui-

DE MUNDI SYSTEMATE.

verum latus rectum, & $\frac{1}{L+ml-mL+n\lambda-nL}$ verum latus transversum trajectoriæ quam cometa describit. (ſ) Dato autem latere transverso datur etiam tempus periodicum cometæ. *Q. E. I.*

Cæterùm cometarum revolventium tempora periodica, & orbium latera transversa, haud satis accuratè determinabuntur, nisi per collationem cometarum inter se, qui diversis temporibus apparent. Si plures cometæ, post æqualia temporum intervalla, eundem orbem descripsisse reperiantur, concludendum erit hos omnes esse unum & eundem cometam, in eodem orbe revolventem. (t) Et tum demum ex revolutionum temporibus dabuntur orbium latera transversa, & ex his lateribus determinabuntur orbes elliptici.

In hunc finem computandæ sunt igitur cometarum plurium trajectoriæ, ex hypothesi quod sint parabolicæ. Nam hujusmodi trajectoriæ cum phænomenis semper congruent quamproximè. Id liquet, non tantùm ex trajectoriâ parabolicâ cometæ anni 1680, quam cum observationibus suprà contuli, sed etiam ex

câ

172. hibuimus poterit inveniri. Ut obtineatur vera longitudo nodi, additur ejus longitudini in primo plano excessus longitudinis assumptæ in plano secundo supra præcedentem ductus in m, & ut habeatur vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ, additur inclinationi plani primi, excessus inclinationis assumptæ in plano tertio supra inclinationem præcedentem ductus in n. Sed trajectoria cometæ ejusque latus rectum corrigi debent tum ob correctam longitudinem nodi, tum ob correctam inclinationem plani ad planum Eclipticæ, quare lateri recto trajectoriæ in primo plano descriptæ sivè ipsi R, addi debet $mr - mR$, excessus scilicet lateris recti in plano secundo suprà latus rectum in plano primo ductus in m. Addere insuper oportet $n\rho - nR$, qui est excessus lateris recti in plano tertio suprà latus rectum in primo ductus in n, ideóque erit $R + mr - mR + n\rho - nR$, verum latus rectum. Simili modo patet datis lateribus transversis in operatione primâ, secundâ & tertiâ respectivè $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$, esse verum latus transversum trajectoriæ

$$\frac{1}{L + ml - mL + n\lambda - nL}.$$

(ſ) 172. * *Dato autem latere transverso.* Accuratè descriptâ cometæ trajectoriâ (per methodos præced.) si deprehendatur ellipsim solis centro tanquam umbilico descriptam, non verò parabolam per determinata trajectoriæ puncta transire, cometa in orbem redibit & dato latere tranverso trajectoriæ hujus, dabitur tempus periodicum; erit scilicet, quadratum temporis periodici cometæ ad quadratum temporis periodici telluris circà solem ut cubus majoris axis orbitæ cometicæ ad cubum majoris axis orbitæ terrestris (160).

(t) * *Et tum demum* (160).

cà cometæ illius insignis, qui annis 1664 & 1665 apparuit, & ab *Hevelio* observatus fuit. Is ex observationibus suis longitudines & latitudines hujus cometæ computavit, sed minùs accuratè. Ex iisdem observationibus *Halleius* noster (u) loca cometæ hujus denuò computavit, & tum demum ex locis sic inventis trajectoriam cometæ determinavit. Invenit autem ejus nodum ascendentem in ♊ 21gr. 13'. 55''., inclinationem orbitæ ad planum eclipticæ 21gr. 18'. 40'', distantiam perihelii à nodo in orbitâ 49gr. 27'. 30''. Perihelium in ♌ 8gr. 40'. 30'' cum latitudine austrinâ heliocentricâ 16gr. 1'. 45''. Cometam in perihelio *Novemb.* 24^d. 11^h. 52'. p. m. tempore æquato *Londini*, vel 13^h. 8' *Gedani*, stylo veteri, & latus rectum parabolæ 410286, existente mediocri terræ à sole distantiâ 100000. Quam probe loca cometæ in hoc orbe computata congruunt cum observationibus, patebit ex tabulâ sequente ab *Halleio* supputatâ.

(u) * *Loca cometæ hujus denuò computavit.* Varias computi hujus ineundi methodos suprà tradidimus.

172.

De Mundi Systemate.

Temp. Appar. Gedani, st. vet.	Observatæ Cometæ distantiæ.	gr. ′ ″	Loca observata. gr. ′ ″	Loca computata in Orbe. gr. ′ ″
Decemb. 24. 18h. 29 ½	à Corde Leonis à Spica Virginis	46 . 24 . 20 22 . 52 . 10	Long. ♎ 7. 1. 0 Lat. aust. 21.39. 0	♎ 7. 1. 29 21. 38. 50
2 . 18 . [illegible]	à Corde Leonis à Spica Virginis	46 . 2 . 45 23 . 52 . 40	Long. ♎ 10.15. 0 Lat. aust. 22 24. 0	♎ [illegible].16. 5 22. 24. 0
7 . 17 . 48	à Corde Leonis à Spica Virginis	44 . 48 . 0 27 . 56 . 40	Long. ♎ 3. 0. 0 Lat. aust. 25 [illegible] 0	♎ 3. 7. 33 25. 21. 40
17 . 14 . 43	à Corde Leonis ab Hum. Orionis dext.	53 . 15 . 15 45 . 43 . 30	Long ♌ 2.56 0 Lat. aust. 49 25. 0	♌ 2. 56. 0 49. 25. 0
19 . 9 . 25	à Procyone à Lucid. Mandib. Ceti	35 . 13 . 50 52 . 56 . 0	Long. ♊ [illegible] 40 30 Lat. aust. [illegible] 48 0	♊ 28. 43. 0 45. 46. 0
20 . 9 . 53½	à Procyone à Lucid. Mandib. Ceti	40 . 49 . 0 40 . 4 . 0	Long. ♊ 1[illegible] 3. 0 Lat. aust. 39.54 0	♊ 13. 5. 0 [illegible]9. 53. 0
21 . 9 . 9½	ab Hum. dext. Orionis à Lucid. Mandib. Ceti	26 . 21 . 25 29 . 28 . 0	Long. ♊ 2.16 0 Lat. aust. 33.41. 0	♊ 2. [illegible]8. 30 33. 39. 40
22 . 9 . 0	ab Hum. dext. Orionis à Lucid. Mandib. Ceti	29 . 47 . 0 20 . 29 . 30	Long. ♉ 24 24. 0 Lat. aust. 27.45. 0	♉ 24. 27. 0 27. 46 0
26 . 7 . 58	à Lucida Arietis ab Aldebaran	23 . 20 . 0 26 . 44 . 0	Long. ♉ 9. 0. 0 Lat. aust. 12.36. 0	♉ 9. 2. 28 12. 34. 13
27 . 6 . 45	à Lucida Arietis ab Aldebaran	20 . 45 . 0 28 . 10 . 0	Long. ♉ 7. 5.40 Lat. aust. 10.23. 0	♉ 7. 8. 45 10. 23. 13
28 . 7 . 39	à Lucida Arietis à Palilicio	18 . 29 . 0 29 . 37 . 0	Long. ♉ 5.24 41 Lat. aust. 8.22.50	♉ 5. 27. 2 8. 23. 37
31 . 6 . 45	à Cing. Androm. à Palilicio	30 . 48 . 10 32 . 53 . 30	Long. ♉ 2. 7.40 Lat. aust. 4.13. 0	♉ 2. 8. 20 4 16. 25
Jan. 1665. 7 . 7 . 37½	à Cing. Androm. à Palilicio	25 . 11 . 0 37 . 12 . 25	Long. ♈ 28.24.47 Lat. bor. 0.54. 0	♈ 28 24. 0 0. 53. 0
13 . 7 . 0	à capite Androm. à Palilicio	28 . 7 . 10 38 . 55 . 20	Long. ♈ 27. 6.54 Lat. bor. 3. 6.50	♈ 27. 6. 39 3. 7. 40
[illegible] 7 . 29	à Cin. Androm. à Palilicio	20 . 3[illegible] . [illegible] 40 . 5 . 0	Long. ♈ 26.28.15 Lat bor. 5.25.50	♈ 26. 28. 50 5. 26. 0
Feb. [illegible] 8 . 37			Long. ♈ 27.24.46 Lat. bor. 7. 3 26	♈ 27. 24. 55 7. [illegible]
22 . 8 . 46			Long. ♈ 28.29.46 Lat. bor. 8 12 36	♈ [illegible]. [illegible]. 58 8 [illegible]
Mar. [illegible]			Long. ♈ 29.18. [illegible] Lat. bor. 8 28.16	♈ 29. 18. [illegible]0 8. 36 12
[illegible] . 8 . [illegible]			Long. ♈ 0. 2.48 Lat. bor. 8.56.30	♉ 0. 2. 42 8. 56. 56

Mense *Februario* anni ineuntis 1665, stella prima arietis quam in sequentibus vocabo γ, erat in ♈ 28gr. 30′. 15″ cum latitudine boreali 7gr. 8′. 58″. eScunda arietis erat in ♈ 29gr. 17′.

17′. 18″ cum latitudine boreali 8gr. 28′. 16″. Et ſtella quædam alia ſeptimæ magnitudinis, quam vocabo *A*, erat in ♈ 28gr. 24′. 45″ cum latitudine boreali 8gr. 28′. 33″. Cometa vero *Feb.* 7^d. 7′. 30″ *Pariſiis* (id eſt *Feb.* 7^d. 8′. 37″ *Gedani*) ſt. vet. triangulum conſtituebat cum ſtellis illis γ & *A* rectangulum ad γ. Et diſtantia cometæ à ſtella γ æqualis erat diſtantiæ ſtellarum γ & *A*, id eſt 1gr. 19′. 46″ in circulo magno, atque ideo ea erat 1gr. 20′. 26″ in parallelo latitudinis ſtellæ γ. Quare ſi de longitudine ſtellæ γ detrahatur longitudo 1gr. 20′. 26″, manebit longitudo cometæ ♈ 27gr. 9′. 49″. *Auzoutius* ex hâc ſuâ obſervatione cometam poſuit in ♈ 27gr. 0′ circiter. Et ex ſchemate, quo *Hookius* motum ejus delineavit, is jam erat in ♈ 26gr. 59′. 24″. Ratione mediocri poſui eundem in ♈ 27gr. 4′. 46″. Ex eâdem obſervatione *Auzoutius* latitudinem cometæ jam poſuit 7gr. & 4′ vel 5′ boream verſus. Eandem rectius poſuiſſet 7gr. 3′. 29″, exiſtente ſcilicet differentia latitudinum cometæ & ſtellæ γ æquali differentiæ longitudinum ſtellarum γ & *A*.

Feb. 22^d. 7^h. 30′ *Londini*, id eſt *Feb.* 22^d. 8^h. 46′ *Gedani*, diſtantia cometæ à ſtella *A*, juxta obſervationem *Hookii* à ſeipſo in ſchemate delineatam, ut & juxta obſervationes *Auzoutii* à *Petito* in ſchemate delineatas, erat pars quinta diſtantiæ inter ſtellam *A* & primam arietis, ſeu 15′. 57″. Et diſtantia cometæ à linea jungente ſtellam *A* & primam arietis erat pars quarta ejuſdem partis quintæ, id eſt 4′. Ideoque cometa erat in ♈ 28gr. 29′. 46″, cum lat. bor. 8gr. 12′. 36″.

Mart. 1^d. 7^h. 0′ *Londini*, id eſt *Mart.* 1^d. 8^h. 16′ *Gedani*, cometa obſervatus fuit prope ſecundam arietis, exiſtente diſtantia inter eoſdem ad diſtantiam inter primam & ſecundam arietis, hoc eſt ad 1gr. 33′, ut 4 ad 45 ſecundum *Hookium*, vel ut 2 ad 23 ſecundum *Gottignies*. Unde diſtantia cometæ à ſecunda arietis erat 8′. 16″ ſecundum *Hookium*, vel 8′. 5″ ſecundum *Gottignies*, vel ratione mediocri 8′. 10″. Cometa vero ſecundum *Gottignies* jam modo prætergreſſus fuerat ſecundam arietis quaſi ſpatio quartæ vel quintæ partis itineris uno die confecti,

DE MUNDI SYSTEMATE.

fecti, id est 1'. 35'' circiter (quocum satis consentit *Auzoutius*) vel paulo minorem secundum *Hookium*, puta 1'. Quare si ad longitudinem primæ arietis addatur 1', & ad latitudinem ejus 8'. 10'', habebitur longitudo cometæ ♈ 29gr. 18', & latitudo borealis 8gr. 36'. 26''.

Mart. 7d. 7h. 30 *Parisiis* (id est *Mart.* 7d. 8h. 37' *Gedani*) ex observationibus *Auzoutii* distantiâ cometæ à secundâ arietis æqualis erat distantiæ secundæ arietis à stellâ *A*, id est 52'. 29''. Et differentia longitudinum cometæ & secundæ arietis erat 45' vel 46', vel ratione mediocri 45. 30''. Ideoque cometa erat in ♉ 0gr. 2'. 48''. Ex schemate observationum *Auzoutii*, quod *Petitus* construxit, *Hevelius* deduxit latitudinem cometæ 8gr. 54. Sed sculptor viam cometæ sub finem motus ejus irregulariter incurvavit, & *Hevelius* in schemate observationum *Auzoutii* à se constructo incurvationem irregularem correxit, & sic latitudinem cometæ fecit esse 8gr. 55'. 30''. Et irregularitatem paulo magis corrigendo, latitudo evadere potest 8gr. 56', vel 8gr. 57'.

Visus etiam fuit hic cometa *Martii* die 9, & tunc locari debuit in ♉ 0gr. 18', cum lat. bor. 9gr. 3'½ circiter.

Apparuit hic cometa menses tres, signaque ferè sex descripsit, & uno die gradus fere viginti confecit. Cursus ejus à circulo maximo plurimum deflexit, in boream incurvatus; & motus ejus sub finem ex retrogrado factus est directus. Et non obstante cursu tam insolito, theoriâ à principio ad finem cum observationibus non minus accuratè congruit, quam theoriæ planetarum cum eorum observationibus congruere solent, ut inspicienti tabulam patebit. Subducenda tamen sunt minuta duo prima circiter, ubi cometa velocissimus fuit; id quod fiet auferendo duodecim minuta secunda ab angulo inter nodum ascendentem & perihelium, seu constituendo (x) angulum illum 49gr. 27'. 18''. Cometæ utriusque (& hujus & superioris) paral-

172. (x) * *Angulum illum* inter nodum ascendentem & perihelium invenerat Halleius 49°. 27'. 30'', constituto autem angulo illo 49°. 27'. 18'', computationibusque repetitis, subducta inveniuntur duo minuta prima circiter, ut oportet, & theoriâ à prin-

parallaxis annua insignis fuit, & (y) indè demonstratur motus annuus terræ in orbe magno. LIBER TERTIUS. PROP. XLII. PROBL. XXII.

Confirmatur etiam theoria per motum cometæ, qui apparuit anno 1683. Hic fuit retrogradus in orbe, cujus planum cum plano eclipticæ angulum ferè rectum continebat. Hujus nodus ascendens (computante *Halleio*) erat in ♍ 23gr. 23′; inclinatio orbitæ ad eclipticam 83gr. 11′; perihelium in ♊ 25gr. 29′. 30″; distantia perihelia à sole 56020, existente radio orbis magni 100000, & tempore perihelii *Julii* 2^{d}. 3^{h}. 50′. Loca autem cometæ in hoc orbe ab *Halleio* computata, & cum locis à *Flamstedio* observatis collata, exhibentur in tabulâ sequente.

1683 Temp. Æquat	Locus Solis	Cometæ Long Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obs.	Lat. Bor. Observ.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Jul. 13.12.55	♌ 1. 2.30	♋ 13. 5.42	29.28.13	♋ 13. 6.42	29.28.20	+1. 0	+0. 7
15.11.15	2.5 .12	11.37.4	29.34. 0	11 39 43	29.34.50	+1.55	+0.50
17.10.20	4.45.45	10. 7. 6	29.33.30	10. 8 40	29.34. 0	+1.34	+0.30
23.13.40	10.38.21	5.10.27	28.51.42	5.11.30	28.50.28	+1. 3	−1.14
25.14. 5	12.35.28	3.27.53	24.24.47	3.27. 0	28.23 40	−0.53	−1. 7
31 9.42	18. 9 22	♊ 27.55. 3	26.22.52	♊ 27.54.24	26 22.25	−0.39	−0.27
31.14.55	18.21.53	27.41. 7	26.16.57	27.41. 8	26.14.50	+0. 1	−2. 7
Aug. 2.14.56	20.17.16	25.29.32	25.16.19	25.28.46	25 17.28	−0.46	+1. 9
4.10.49	22. 2.50	23.18.20	24.10.49	23.16.55	24.12.19	−1.25	+1.30
6.10. 9	23.56 45	20.42.23	22.47. 5	20 40 32	22.49. 5	−1.51	+2. 0
9.10.26	26.50 52	16. 7.57	20. 6.37	16. 5.55	20. 6.10	−2 2	−0.17
15.14. 1	♍ 2.47.13	3.30.48	11.37.33	3.26.18	11.32. 1	−4.30	−5.32
16.15.10	3.48. 2	0 43. 7	9.34.16	0.41.55	9.34.13	−1.12	−0. 3
18.15.44	5.45.33	♉ 24.52.53	5.11.15 Austr	♉ 14.49. 5	5. 9.11 Aust.	−3.48	−2. 4
22.14.44	9.35.49	11. 7.14	5.16.58	11. 7.12	5.16.58	−0. 2	−0. 3
23.15.52	10.36.48	7. 2.18	8.17. 9	7. 1.17	8.16.41	−1. 1	−0 28
26 16. 2	13.31.10	♈ 24.45.31	16.38. 0	♈ 24.44. 0	16 38 20	−1.31	+0.20

Confirmatur etiam theoria per motum cometæ retrogradi, qui apparuit anno 1682. Hujus nodus ascendens (computante *Hal-*

principio ad finem cum observationibus congruit. Corrigendam esse theoriam duobus minutis primis circiter ex observatione cometæ, ubi motus ejus velocissimus fuit, colligitur.

(y) * *Et indè demonstratur.* † Quâ ratione annua cometarum parallaxis cum telluris quiete conciliari possit legatur apud Ricciolium in almagesto, Tacquetum in Astronomiâ aliosque passim, ubi de Planetarum retrogradationibus agunt. 172.

Halleio) erat in ♉ 21gr. 16′. 30″. Inclinatio orbitæ ad planum eclipticæ 17gr. 56′. 0″. Perihelium in ♒ 2gr 52′ 50″. Diſtantia perihelia à ſole 58328, exiſtente radio orbis magni 100000. Et tempus æquatum perihelii *Sept.* 4d. 7h. 39′. Loca verò ex obſervationibus *Flamſtedii* computata, & cum locis per theoriam computatis collata, exhibentur in tabulà ſequente.

1682. Temp. Appar.	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obſ.	Lat. Bor. Obſer.	Differ Long.	Differ. Lat
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Aug 19. 16.38	♍ 7. 0. 7	♌ 18.14.28	25.50. 7	♌ 18.14.40	25.49.55	− 0.12	+ 0.12
20. 15.38	7.55.52	24.46.23	26.14.42	24.46.22	26.12.52	+ 0. 1	+ 1.50
21. 8.21	8.36.14	29.37.15	26.20. 3	29.38. 2	26.17.37	− 0.47	+ 2.26
22. 8. 8	9.33.55	♍ 6.29.53	26. 8.42	♍ 6.30. 3	26. 7.12	− 0.10	+ 1.30
29. 8.20	16.22.40	♎ 12.37.54	18.37.47	♎ 12.37.49	18.34. 5	+ 0. 5	+ 3.42
30. 7.45	17.19.41	15.36. 1	17.26.43	15.35.18	17.27.17	+ 0.43	− 0.34
Sept. 1. 7.33	19. 6. 9	20.30.53	15.13. 0	20.27. 4	15. 9.49	+ 3.49	+ 3.1
4. 7.22	22. 1.28	25.42. 0	12.23.48	25.40.58	12.22. 0	+ 1. 2	+ 1.48
5. 7.32	23.10.29	27. 0.46	11.33. 8	26.59.24	11.33.51	+ 1.22	− 0.43
8. 7.16	26. 5.58	29.58.44	9.26.46	29.58.45	9.26.43	− 0. 1	+ 0. 3
9. 7.26	27. 5. 9	♏ 0.44.10	8.49.10	♏ 0.44. 4	[illegible]	+ 0. 6	+ 0.45

Confirmatur etiam theoria per motum retrogradum cometæ, qui apparuit anno 1723. Hujus nodus aſcendens (computante D. *Bradleo*, aſtronomiæ apud *Oxonienſes* profeſſore *Saviliano*) erat in ♈ 14gr. 16′. Inclinatio orbitæ ad planum eclipticæ 49gr. 59′. Perihelium in ♉ 12gr. 15′. 20″. Diſtantia perihelia à ſole 998651, exiſtente radio orbis magni 1000000, & tempore æquato perihelii *Septem.* 16d. 16h. 10′. Loca verò cometæ in hoc orbe à *Bradleo* computata, & cum locis à ſeipſo & patruo ſuo D. *Poundio*, & à D. *Halleio* obſervatis collata exhibentur in tabulà ſequente.

1723.

1723. Temp. Æquat.	Comet. Long. Obſervat	Lat Bor. Obſervat.	Comet. Long. Comput.	Lat. Bor. Comput.	Differ. Long	Differ. Latit.
d. h.	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″
Octob. 9 8. 5	♒ 7 . 22 . 15	5. 2. 0	♒ 7 . 21 . 26	5. 2 47	+ 49	− 47
10.6.21	6 . 41 . 2	7 . 44 . 13	6 . 41 . 42	7.43.18	− 50	+ 55
12.7.22	5 . 39 . 58	11 . 55 . 0	5 . 40 . 19	11.54 55	− 21	+ 5
14.8.57	4 . 59 . 49	14 . 43 . 50	5 . 0 . 37	14.44 1	− 48	− 11
15.6.35	4 . 47 . 41	15 40 . 51	4 . 47 . 45	15 40 55	− 4	− 4
21.6.22	4 . 2 . 32	19 . 41 . 49	4 . 2 . 21	19.42. 3	+ 11	− 14
22.6.24	3 . 59 . 2	20. 8 . 12	3 . 59 . 10	20. 8.17	− 8	− 5
24.8. 2	3 . 55 . 29	20 . 55 . 18	3 . 55 . 11	20.55. 9	+ 18	+ 9
29.8.56	3 . 56 . 17	22 . 20 . 27	3 . 56 . 42	22.20.10	− 25	+ 7
30.6.20	3 . 58 . 9	22 . 32 . 28	3 . 58 . 17	22.32.12	− 8	+ 16
Nov. 5.5.53	4 . 16 . 30	23 . 38 . 33	4 . 16 . 23	23.38. 7	+ 7	+ 26
8.7. 6	4 . 29 . 36	24. 4 . 30	4 . 29 . 54	24. 4.40	− 18	− 10
14.6.20	5 . 2 . 16	24 . 48 . 46	5 . 2 . 51	24.48. 6	− 35	+ 30
20.7.45	5 . 42 . 20	25 . 24 . 45	5 . 43 . 13	25.25.17	− 53	− 32
Dec. 7.6.45	8 . 4 . 13	26 . 54 . 18	8 . 3 . 55	26.53 42	+ 18	+ 36

His exemplis abundè ſatis manifeſtum eſt, quod motus cometarum per theoriam à nobis expoſitam non minus accuratè exhibentur, quam ſolent motus planetarum per eorum theorias. (z) Et propterea orbes cometarum per hanc theoriam enumerari poſſunt, & tempus periodicum cometæ in quolibet orbe revolventis tandem ſciri, & tum demum orbium ellipticorum latera tranſverſa & apheliorum altitudines innoteſcent.

Cometa retrogradus, qui apparuit anno 1607, deſcripſit orbem, cujus nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 20gr. 21′; inclinatio plani orbis ad planum eclipticæ erat 17gr. 2′; perihelium erat in ♒ 2gr. 16′; & diſtantia perihelia à ſole erat 58680, exiſtente radio orbis magni 100000. Et cometa erat in perihelio *Octob.* 16^{d}. 3^{h}. 50′. Congruit hic orbis quamproximè cum orbe cometæ, qui apparuit anno 1682. Si cometæ hi duo fuerint unus & idem, revolvetur hic cometa ſpatio annorum 75, & (a) axis major orbis ejus erit ad axem majorem orbis magni, ut $\sqrt{c}:75 \times 75$ ad 1, ſeu 1778 ad

(z) * *Et propterea.* Quomodò hæc omnia fieri poſſint variis methodis ſuprà expoſuimus.

(a) * *Et axis major* orbis ejus erit ad axem majorem orbis magni ut radix cubica numeri 75 × 75 ad 1 (172). 172.

DE MUNDI SYSTEMATE. ad 100 circiter. Et (b) distantia aphelia cometæ hujus à sole, erit ad distantiam mediocrem terræ à sole, ut 35 ad 1 circiter. (c) Quibus cognitis, haud difficile fuerit orbem ellipticum cometæ hujus determinare. Atque hæc ita se habebunt, si cometa, spatio annorum septuaginta quinque, in hoc orbe posthac redierit. Cometæ reliqui majori tempore revolvi videntur & altiùs ascendere.

Cæterum cometæ, ob magnum eorum numerum, & magnam apheliorum à sole distantiam, & longam moram in apheliis, per gravitates in se mutuo nonnihil turbari debent, & eorum eccentricitates & revolutionum tempora nunc augeri aliquantulum, nunc diminui. Proindè non est expectandum ut cometa idem in eodem orbe, & iisdem temporibus periodicis accuratè redeat. Sufficit si mutationes non majores obvenerint, quam quæ à causis prædictis oriantur.

Et hinc ratio redditur, (d) cur cometæ non comprehendantur zodiaco more planetarum, sed indè migrent & motibus variis in omnes cœlorum regiones ferantur. Scilicet eo fine, ut in apheliis suis, ubi tardissimè moventur, quamlongissimè distent ab invicem, & se mutuò quam minime trahant. Quâ de causâ cometæ, qui altiùs descendunt, ideoque tardissimè moventur in apheliis, debent altiùs ascendere.

Co-

173. (b) * *Et distantia aphelia.* Quoniam distantia perihelia cometæ à sole erat 58680, existente radio orbis magni 1000 o erit eadem distantia perihelia 29, circiter existente radio orbis magni 100, ac proindè distantia aphelia quæ est differentia inter axem majorem orbitæ cometicæ 1 78 & distantiam perihеliam 29, erit earumdem partium 1749, ideóque distantia aphelia cometæ hujus à sole erit ad distantiam mediocrem terræ à sole ut 1749 ad 29, hoc est, ut 35 ad 1 circiter.

(c) * *Quibus cognitis.* (Per prop. 20. lib. 1.).

(d) 173. * *Cur cometæ non comprehendantur Zodiaco* Ex observato sæpe sæpius cometarum cursu retrogrado deduxit Newtonus cometas non comprehendi Zodiaco more planetarum, sed indè migrare & motibus variis in omnes cœlorum regiones excurrere Attamen Clariss. Cassinus in monum. Paris. an. 1731 retrogrados cometarum motus ad directos reduxit. Verum eo artificio utitur Vir Doctissimus ut distantiam cometæ à terrâ vel sole pro arbitrio assumat, & modò tellurem inter solem & cometam, modò cometam inter solem & tellurem ac denique solem inter cometam & tellurem, pro necessitate, collocet. Quâ ratione id fieri possit non satis intelligitur, nisi ignota omninò fingatur cometarum theoria; concesso enim aliquo cometarum systemate, distantias illas pro lubitu usurpare non licet, sed ex datis motuum elementis, cometarum distantia totaque trajectoria deter-

Cometa, qui anno 1680 apparuit, minus distabat à sole in perihelio suo quam parte sextâ diametri solis; & propter summam velocitatem in viciniâ illâ, & densitatem aliquam atmosphæræ solis, resistentiam nonnullam sentire debuit, & aliquantulum retardari, & propiùs ad solem accedere: & singulis revolutionibus accedendo ad solem, incidet is tandem in corpus solis. Sed & in aphelio ubi tardissimè movetur, aliquando per attractionem aliorum cometarum retardari potest, & subindè in

solem

terminantur. Sic Halleius definivit trajectoriam cometæ qui annis 1664. & 1665. apparuit. Ut autem retrogradum hujus cometæ motum ad directum reducat Clariss. Cassinus talem huic cometæ motum tribuit qui cum Halleii computo nequaquam convenit. Quam probe tamen cum observationibus theoria congruat ostendit tabula paulò antè exhibita. Quamvis itaque retrogrados cometarum motus ad directos ingeniosâ arte reduxerit Cassinus, non id tamen satis esse arbitramur ut eam rejiciamus cometarum theoriam quæ phænomenis appritè respondet, atque incerti sinè ullâ theoriâ erremus. Prætereà talem orbitam prædicto cometæ assignat Cassinus ut extrà orbem annuum fere non excurrat; Quod si res ità se haberet, hic cometa in conspectum citò rediisset, cometas enim ad maximam quoque distantiam conspicuos esse constat ex defectu parallaxeos. Nec feliciori successu ad motum directum reduci posse videtur motus retrogradus cometæ an. 1680. Nam prætérquam quod omnem cometarum theoriam fictis ad arbitrium hypothesibus everti necesse sit, in explicatione Cassini gravissima occurrit difficultas cujus vim totam sensit Clariss. Vir. Oporteret scilicet ut cometa ille paulò ante 27^{am}. diem Novembris per nodum descendentem transierit & versus diem 17^{m}. Decembris ad nodum ascendentem pervenerit, ideóque cometa breviori quam unius mensis intervallo, totum spatium quod est infrà planum Eclipticæ trajecisset. Porrò tanta velocitas caret verisimilitudine, nec conciliari posse videtur cum observatis longo temporis spatio hujus cometæ motibus; hic enim Astronomorum oculis citò sese subduxisset. Singulas explicationes quæ in loco cit. monum. Paris. leguntur percurrere longius foret, satis erit addere eas hoc potissimum fine excogitatas fuisse ut nempe servaretur & à gravissimâ objectione liberaretur vorticum hypothesis. Verum his explicationibus cæteroquin ingeniosissimis nondum tamen propositus finis obtineri videtur; hanc enim difficultatem effugientes vorticum patroni, in aliam incurrunt. Oporteret siquidem ut cometarum vortices ipsum saltem telluris vorticem intersecarent, quod sine vorticum perturbatione ac tandem destructione fieri posse non intelligitur. Alias hypotheses finxerunt alii. Quidam cometas habuerunt tanquam planetas non circà solem nostrum, sed circa alium velut centrum revolventes. Nonnulli eos habuerunt velut satellites planetæ cujusdam primarii in nostro vortice constituti, qui tamen ob maximam illius à nobis distantiam conspici non potest, ità ut cometæ seu satellites sese nobis duntaxat conspicuos præbeant, dum in inferiori & telluris proximiori orbitarum suarum parte versantur. Sed à Newtonianâ cometarum theoriâ quæ phænomenis consentanea est nequaquam nos removere debent hypotheses illæ quæ eam duntaxat ob causam subtiliter inventæ sunt ut servaretur vorticum hypothesis quam aliis multis difficultatibus premi passim ostendimus. Cæterum quidquid de hâc materiâ diximus & ipsa, prout nobis visum est, rei veritas & commentatorum officium à nobis postulabant. 173.

ſolem incidere. (e) Sic etiam ſtellæ fixæ, quæ paulatim expirant in lucem & vapores, cometis in ipſas incidentibus refici poſſunt, & novo alimento accenſæ pro ſtellis novis haberi. Hujus generis ſunt ſtellæ fixæ, quæ ſubito apparent, & ſub initio quam maximè ſplendent, & ſubindè paulatim evaneſcunt. Talis fuit ſtella in cathedrâ Caſſiopeiæ quam *Cornelius Gemma* octavo *Novembris* 1572, luſtrando illam cœli partem nocte ſerena minimè vidit; at nocte proximâ (*Novem.* 9.) vidit fixis omnibus ſplendidiorem, & luce ſuâ vix cedentem veneri. Hanc *Tycho Brahæus* vidit undecimo ejuſdem menſis ubi maximè ſplenduit; & ex eo tempore paulatim decreſcentem & ſpatio menſium ſexdecim evaneſcentem obſervavit. Menſe *Novembri*, ubi primùm apparuit, venerem luce ſuâ æquabat. Menſe *Decembri*

174. (e) 174. * *Sic etiam ſtellæ fixæ.* De ſtellarum variationibus nonnulla hic afferemus quæ habet Clariſſ. D. De Maupertuis in eximio opuſculo de figuris aſtrorum & in mon. Pariſ. an. 1734. Fixas, quæ ſunt totidem ſoles, variis donatas eſſe figuris & ex iis aliquas ad figuram planam vel planitiem accedere non repugnat. Nam à ſphæroide propemodum ſphærico per innumeros gradus depreſſionis verſus polos tandem devenitur ad planum circulare, ſi continuò varietur ratio vis centrifugæ ad gravitatem, ut patet ex num 56. His poſitis, ratio reddi poterit cur fixæ quædam nunc appareant, nunc evaneſcant, cur mutetur apparens ſtellarum quarumdam magnitudo, nec non etiam cur ſtellæ aliquæ quaſi recens accenſæ oriri viſæ ſint, quædam verò quaſi extinctæ videri defierint. Si in ſtellarum numero reperiantur aliquæ ad figuram planam accedentes, illæ dum faciem ſuam nobis obvertunt, ſphærarum inſtar apparebunt. Si autem reſpectu noſtri ſitum ſuum mutent, magis vel minus ſtellarum illarum ſplendor decreſcet, prout hoc vel illo modo ſeſe nobis oſtendent, ac tandem exiguæ craſſitiei latus exhibeant & ſatis longe à nobis diſtent, conſpectui noſtro ſeſe omninò ſubducent. Quomodò autem fixæ reſpectu noſtri poſitionem ſuam mutent explicari poteſt, ſi ponamus circa ſtellam compreſſam revolvere planetam aliquam ingentis molis aut cometam in orbitâ valde excentricâ & ad æquatorem ſtellæ inclinata; in hâc enim hypotheſi, planeta ad perihelium ſuum accedens juxtà attractionis leges inclinationem fixæ planæ perturbabit, & hinc fieri poterit ut partem lucidam diſci nobis obverſam conſpiciamus quæ ob exiguam lateris compreſſi craſſitiem oculos noſtros anteà effugiebat. Ex his quoque intelligitur fieri poſſe ut circa planetam congregetur annulus ſaturni annulo ſimilis, ſi nempè cometa cujus cauda ex vaporibus tenuiſſimis æſtu ſolis in perihelio elevatis componitur, ad planetam aliquem maximè potentem proximè accederet. Hic enim vaporum torrens attractionis vi ad revolvendum circà planetam annuli inſtar poſſet detorqueri; imò impoſſibile non foret ipſum quoque corpus cometæ circà planetam rapi & ſic planeta ſatellitem acquireret. Haberet autem planeta ſatellitem ſinè annulo, ſi cometa deſtitueretur caudâ, ſed adjicietur etiam annulus, ſi cometa caudam habuerit, atque annulus aderit ſinè ſatellite, ſi cauda duntaxat à planeta attrahatur. Hæc ſunt quæ ad hunc Newtoni locum præcipuè referuntur; cæterùm in laudatis opuſculis elegantiſſima ſunt problemata quæ conſulat Lector.

bri nonnihil diminuta jovem æquare videbatur. Anno 1573, mense *Januario* minor erat jove & major Sirio, cui in fine *Februarii* & *Martii* initio evasit æqualis. Mense *Aprili* & *Maio* stellis secundæ magnitudinis, *Junio*, *Julio* & *Augusto* stellis tertiæ magnitudinis, *Septembri*, *Octobri* & *Novembri* stellis quartæ, *Decembri* & anni 1574, mense *Januario* stellis quintæ, & mense *Februario* stellis sextæ magnitudinis æqualis videbatur, & mense *Martio* ex oculis evanuit. Color illi ab initio clarus, albicans ac splendidus, postea flavus, & anni 1573 mense *Martio* rutilans instar martis aut stellæ aldebaran, *Maio* autem albitudinem sublividam induxit, qualem in saturno cernimus, quem colorem usque in finem servavit, semper tamen obscurior facta. Talis etiam fuit stella in dextro pede serpentarii, quam *Kepleri* discipuli anno 1604, die 30 *Septembris* st. vet. apparere cœpisse observarunt, & luce suâ stellam jovis superasse, cum nocte præcedente minimè apparuisset. Ab eo verò tempore paulatim decrevit, & spatio mensium quindecim vel sexdecim ex oculis evanuit. Tali etiam stellâ novâ supra modum splendente *Hipparchus* ad fixas observandas & in catalogum referendas excitatus fuisse dicitur. Sed fixæ, quæ per vices apparent & evanescunt, quæque paulatim crescunt, & luce sua fixas tertiæ magnitudinis vix unquam superant, videntur esse generis alterius, & revolvendo partem lucidam & partem obscuram per vices ostendere. Vapores autem, qui ex sole & stellis fixis & caudis cometarum oriuntur, incidere possunt per gravitatem suam in atmosphæras planetarum & ibi condensari & converti in aquam & spiritus humidos, & subindè per lentum calorem in sales, & sulphura, & tincturas, & limum, & lutum, & argillam, & arenam, & lapides, & coralla, & substantias alias terrestres paulatim migrare.

SCHO-

De Mundi Systemate.

SCHOLIUM GENERALE.

(f) Hypothesis vorticum multis premitur difficultatibus. Ut planeta unusquisque radio ad solem ducto areas describat tempori proportionales, tempora periodica partium vorticis deberent esse in duplicatâ ratione distantiarum à sole. Ut periodica planetarum tempora sint in proportione sesquiplicatâ distantiarum à sole, tempora periodica partium vorticis deberent esse in sesquiplicatâ distantiarum proportione. Ut vortices minores circum saturnum, jovem & alios planetas gyrati conserventur & tranquillè natent in vortice solis, tempora periodica partium vorticis solaris deberent esse æqualia. Revolutiones solis & planetarum circum axes suos, quæ cum motibus vorticum congruere deberent, ab omnibus hisce proportionibus discrepant. Motus cometarum sunt summè regulares, & easdem leges cum planetarum motibus observant, & per vortices explicari nequeunt. Feruntur cometæ motibus valdè eccentricis in omnes cœlorum partes, quod fieri non potest, nisi vortices tollantur.

Projectilia, in aëre nostro, solam aëris resistentiam sentiunt. Sublato aëre, ut fit in vacuo *Boyliano*, resistentia cessat, siquidem pluma tenuis & aurum solidum æquali cum velocitate in hoc vacuo cadunt. Et par est ratio spatiorum cœlestium, quæ sunt suprà atmosphæram terræ. Corpora omnia in istis spatiis liberrimè moveri debent; & propterea planetæ & cometæ in orbibus specie & positione datis secundum leges suprà expositas perpetuò revolvi. Perseverabunt quidem in orbibus suis per leges gravitatis, sed regularem orbium situm primitùs acquirere per leges hasce minimè potuerunt.

Planetæ sex principales revolvuntur circum solem in circulis soli concentricis, eâdem motus directione, in eodem plano quamproximè. Lunæ decem revolvuntur circum terram, jovem & saturnum in circulis concentricis, eâdem motus directio-

174. (f) * *Hypothesis vorticum.* (Prop. 52. lib. 2. cum coroll. schol. prop. 40. lib. 2. & not. 173. lib. huj.).

tione, in planis orbium planetarum quamproximè. (g) Et hi omnes motus regulares originem non habent ex causis mechanicis; siquidem cometæ in orbibus valde eccentricis, & in omnes cœlorum partes liberè feruntur. Quo motus genere cometæ per orbes planetarum celerrimè & facillimè transeunt, & in apheliis suis ubi tardiores sunt & diutius morantur; quàm longissimè distant ab invicem, ut se mutuò quam minimè trahant. Elegantissima hæcce solis, planetarum & cometarum compages non nisi consilio & dominio entis intelligentis & potentis oriri potuit. Et si stellæ fixæ sint centra similium systematum, hæc omnia simili consilio constructa suberunt *Unius* dominio: præsertim cum lux fixarum sit ejusdem naturæ ac lux solis, & systemata omnia lucem in omnia invicem immittant. Et ne fixarum systemata per gravitatem suam in se mutuò cadant, hic eadem immensam ab invicem distantiam posuerit.

Hic omnia regit non ut anima mundi, sed ut universorum dominus. Et propter dominium suum, dominus deus (*) Παντοκράτωρ dici solet. Nam deus est vox relativa & ad servos refertur: & deitas est dominatio Dei, non in corpus proprium, uti sentiunt quibus deus est anima mundi, sed in servos. Deus summus est ens æternum, infinitum, absolutè perfectum: sed ens utcunque perfectum sine dominio non est dominus deus. Dicimus enim deus meus, deus vester, deus *Israelis*, deus deorum, & dominus dominorum: sed non dicimus æternus meus, æter-

(g) * *Et hi omnes motus regulares.* Celeberrimi Viri Joannes & Daniel Bernoullius, prior in physicâ cœlesti, posterior in disquisitionibus Physico-Astronomicis mechanicam horumce motuum causam ex vorticibus repetunt. Sed cum mechanicæ explicationes illæ omnibus obnoxiæ sint difficultatibus quibus vorticum hypothesim premi jam ostendimus, huic rei diutiùs non immorabimur. Satis erit describere verba quæ habet Johan. Bernoullius mentionem faciens de hoc ipso Newtoni loco. (Si causæ illæ non sunt mechanicæ, erunt præternaturales & miraculo tribuendæ; sed magnum Philosophum non decet ad miraculum recurrere, ubi alicujus phænomeni quæritur explicatio.). Numquid pari jure cartesianum Philosophum possumus interrogare quanam causa mechanica vortices secundum varias directiones ferantur, cur planetarum circumsolarium vortices ab occidente in orientem moveantur? ubi phænomenon aliquod ad primam causam deductum est, hic hærere causamque mechanicam ulteriùs non quærere, magnum Philosophum non dedecet 174.

(*) Id est Imperator universalis.

DE MUNDI SYSTEMATE.

æternus veſter, æternus *Iſraelis*, æternus deorum; non dicimus infinitus meus, vel perfectus meus. Hæ appellationes relationem non habent ad ſervos. Vox deus paſſim (†) ſignificat dominum: ſed omnis dominus non eſt deus. Dominatio entis ſpiritualis deum conſtituit, vera verum, ſumma ſummum, ficta fictum. Et ex dominatione verâ ſequitur deum verum eſſe vivum, intelligentem & potentem; ex reliquis perfectionibus ſummum eſſe, vel ſummè perfectum. Æternus eſt & infinitus, omnipotens & omniſciens, id eſt, durat ab æterno in æternum, & adeſt ab infinito in infinitum: omnia regit; & omnia cognoſcit, quæ fiunt aut fieri poſſunt. Non eſt æternitas & infinitas, ſed æternus & infinitus; non eſt duratio & ſpatium, ſed durat & adeſt. Durat ſemper, & adeſt ubique, & exiſtendo ſemper & ubique, durationem & ſpatium conſtituit. Cum unaquæque ſpatii particula ſit *ſemper*, & unumquodque durationis indiviſibile momentum *ubique*, certè rerum omnium fabricator ac dominus non erit *nunquam*, *nuſquam*. Omnis anima ſentiens diverſis temporibus, & in diverſis ſenſuum, & motuum organis eadem eſt perſona indiviſibilis. Partes dantur ſucceſſivæ in duratione, coexiſtentes in ſpatio, neutræ in perſona hominis ſeu principio ejus cogitante; & multò minùs in ſubſtantia cogitante dei. Omnis homo, quatenus res ſentiens, eſt unus & idem homo durante vitâ ſuâ in omnibus & ſingulis ſenſuum organis. Deus eſt unus & idem deus ſemper & ubique. Omnipræſens eſt non per *virtutem* ſolam, ſed etiam per *ſubſtantiam*: nam virtus ſine ſubſtantia ſubſiſtere non poteſt. In ipſo (‡) continentur & moventur univerſa, ſed ſine mutuâ paſſione. Deus nihil

(†) *Pocokus* noſter vocem *dei* deducit à voce *Arabicâ du*, (& in caſu aliquo *di*,) quæ dominum ſignificat. Et hoc ſenſu principes vocantur dii, *Pſal.* lxxxiv. 6 & *Joan.* x. 45. Et *Moſes* dicitur *deus* fratris *Aaron*, & *deus* regis *Pharaoh* (*Exod.* iv. 16. & vii. 1.) Et eodem ſenſu animæ principum mortuorum olim à gentibus vocabantur dii, ſed falſo propter defectum dominii. (*Nota Autoris*).

(‡) Ita ſentiebant veteres, ut *Pythagoras* apud *Ciceronem*, de Naturâ deorum, *lib.* 1. *Thales*, *Anaxagoras*, *Virgilius*, Georgic. *lib.* iv. *v* 220. & Æneid. *lib.* 6. *v.* 721. *Philo* Allegor. *lib.* 1. ſub initio. *Aratus* in Phænom. ſub initio. Ita etiam ſcriptores ſacri ut *Paulus* in Act. xvii. 27. 28. *Johannes* in Evang. xiv. 2. *Moſes* in Deut. iv. 39. & x. 14. *David* Pſal. cxxxix. 7. 8. 9. *Salmon* 1. Reg. viii. 27. *Job* xxii. 12. 13.

nihil patitur ex corporum motibus: illa nullam ſentiunt reſiſtentiam ex omnipræſentiâ dei. Deum ſummum neceſſariò exiſtere in confeſſo eſt: Et eâdem neceſſitate *ſemper* eſt & *ubique*. Unde etiam totus eſt ſui ſimilis, totus oculus, totus auris, totus cerebrum, totus brachium, totus vis ſentiendi, intelligendi, & agendi, ſed more minimè humano, more minimè corporeo, more nobis prorſus incognito. Ut cæcus non habet ideam colorum, ſic nos ideam non habemus modorum, quibus deus ſapientiſſimus ſentit & intelligit omnia. Corpore omni & figurâ corporeâ prorſus deſtituitur, ideoque videri non poteſt, nec audiri, nec tangi, nec ſub ſpecie rei alicujus corporeæ coli debet. Ideas habemus attributorum ejus, ſed quid ſit rei alicujus ſubſtantia minimè cognoſcimus. Videmus tantùm corporum figuras & colores, audimus tantùm ſonos, tangimus tantùm ſuperficies externas, olfacimus odores ſolos, & guſtamus ſapores: intimas ſubſtantias nullo ſenſu, nullâ actione reflexâ cognoſcimus; & multò minùs ideam habemus ſubſtantiæ dei. Hunc cognoſcimus ſolummodo per proprietates ejus & attributa, & per ſapientiſſimas & optimas rerum ſtructuras & cauſas finales, & admiramur ob perfectiones; veneramur autem & colimus ob dominium. Colimus enim ut ſervi, & deus ſine dominio, providentiâ, & cauſis finalibus nihil aliud eſt quam fatum & natura. A cæcâ neceſſitate metaphyſicâ, quæ utique eadem eſt ſemper & ubique, nulla oritur rerum variatio. Tota rerum conditarum pro locis ac temporibus diverſitas, ab ideis & voluntate entis neceſſariò exiſtentis ſolummodo oriri potuit. Dicitur autem deus per allegoriam videre, audire, loqui, ridere, amare, odio habere, cupere, dare, accipere, gaudere, iraſci, pugnare, fabricare, condere, conſtruere. Nam ſermo omnis de deo à rebus humanis per ſimilitudinem aliquam deſumitur, non perfectam quidem, ſed aliqualem tamen. Et hæc de deo, de

13. 14. *Jeremias* xxiii. 23. 24. Fingebant autem idololatræ ſolem, lunam, & aſtra, animas hominum & alias mundi partes eſſe partes dei ſummi & ideò colendas ſed falsò. (*Nota Autoris*).

De Mundi Systemate.

de quo utique ex phænomenis disserere, ad philosophiam naturalem pertinet.

Hactenus phænomena cælorum & maris nostri per vim gravitatis exposui, sed causam gravitatis nondum assignavi. Oritur utique hæc vis à causâ aliquâ, quæ penetrat ad usque centra solis & planetarum, sine virtutis diminutione; quæque agit non pro quantitate *superficierum* particularum, in quas agit (ut solent causæ mechanicæ) sed pro quantitate materiæ *solidæ*; & cujus actio in immensas distantias undique extenditur, decrescendo semper in duplicatâ ratione distantiarum. Gravitas in solem componitur ex gravitatibus in singulas solis particulas, & recedendo à sole decrescit accuratè in duplicatâ ratione distantiarum ad usque orbem saturni, (h) ut ex quiete apheliorum planetarum manifestum est, & ad usque ultima cometarum aphelia, si modo aphelia illa quiescant. Rationem verò harum gravitatis proprietatum ex phænomenis nondum [illegible] deducere, & hypotheses non fingo. Quicquid [illegible] omenis non deducitur, *hypothesis* vocanda est, & hypotheses seu metaphysicæ, seu physicæ, seu qualitatum occultarum, seu mechanicæ, in *philosophiâ experimentali* locum non habent. In hâc philosophiâ propositiones deducuntur ex phænomenis, & redduntur generales per inductionem. Sic impenetrabilitas, mobilitas, & impetus corporum & leges motuum & gravitatis innotuerunt. Et satis est quod gravitas reverà existat, & agat secundum leges à nobis expositas, & ad corporum cælestium & maris nostri motus omnes sufficiat.

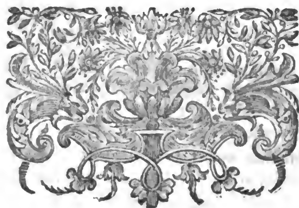
Adjicere jam liceret nonnulla de spiritu quodam subtilissimo corpora crassa pervadente, & in iisdem latente; cujus vi & actionibus particulæ corporum ad minimas distantias se mutuò attrahunt, & contiguæ factæ cohærent: & corpora electrica agunt ad distantias majores, tam repellendo quam attrahendo corpuscula vicina; & lux emittitur, reflectitur, refringitur, inflectitur, & corpora calefacit; & sensatio omnis excitatur, & membra ani-

174. (h) * *Ut ex quiete apheliorum.* (Prop. 2. lib. huj.).

animalium ad voluntatem moventur, vibrationibus ſcilicet hujus ſpiritus per ſolida nervorum capillamenta ab externis ſenſuum organis ad cerebrum & à cerebro in muſculos propagatis. (i) Sed hæc paucis exponi non poſſunt; neque adeſt ſufficiens copia experimentorum, quibus leges actionum hujus ſpiritus accuratè determinari & monſtrari debent.

(i) * *Sed hæc paucis exponi non poſſunt.* De hoc ſubtiliſſimo ſpiritu plurimas quæſtiones ſibi proponit Newtonus in tractatu opticæ. 174

FINIS.



INDEX LIBRI TERTII.

INDEX

PROPOSITIONUM TOTIUS OPERIS.

IN TOMO PRIMO.

PROP.

PROP.

tro

la

FINIS PROPOSITIONUM LIBRI PRIMI.

INDEX
PROPOSITIONUM
LIBRI SECUNDI
IN TOMO SECUNDO.

PRO-

PROP.

PRO-

FINIS PROPOSITIONUM LIBRI SECUNDI.

INDEX
PROPOSITIONUM
LIBRI TERTII
IN TOMO III. PARTE PRIMA.

IN TOMO III. PARTE SECUNDA.

FINIS PROPOSITIONUM LIBRI TERTII, ET TOTIUS OPERIS.

DELOS SNC - FIRENZE 1987

1.5.130 (v.III;pt.II)
restauro carta, imbrachettatura (tylose MH 300p; carta e velina giapponese). Guardie F(Ingres 20231 e pelle uovo). Cucitura su 4 nervi (nervi canapa;fili lino).Capitelli naturali (lino),passanti sotto catenella a centro fascicoli;capitelli ornati(esterno cotone ritorto fiorentino). Quadranti sagomati incartonati (cartone fibrato e L.C. Fabriano). Indorsatura in pelle naturale scarnita (pelle capra,tylose MH 300p, Vinavil 59). Coperta in tutta pelle (pelle capra; tylose MH 300p).